Mehrfachreflexionen in Matrizenschreibweise

SIGRID THALLER | LEOPOLD MATHELITSCH

Dieses Dokument ist eine Ergänzung zum Artikel „Reflexionen: der Ball ist nicht immer rund“ in **Physik in unserer Zeit**, 41. Jahrgang 2010, Nr. 2, S. 88.

Eine (3x3)-Matrix ist ein Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation einer solchen Matrix mit einem 3-dimensionalen Vektor ergibt wieder einen 3-dimensionalen Vektor und ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.$$

Der Zustand eines Balls wird mit dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$Z = \begin{pmatrix} v_x \\ r \cdot \omega \\ v_y \end{pmatrix}$$

beschrieben [1, 2]. Dabei bezeichnen v_x und v_y die Geschwindigkeit des Balls in x- und y-Richtung, ω die Winkelgeschwindigkeit des Balls und r den Ballradius. Die gleitende Reflexion (Gleichungen (1), (2), und (4) im Artikel) kann nun wesentlich kürzer formuliert werden: $Z_2 = R_G \cdot Z_1$ mit

$$Z_1 = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ r \cdot \omega_1 \\ v_{y1} \end{pmatrix},\ Z_2 = \begin{pmatrix} v_{x2} \\ r \cdot \omega_2 \\ v_{y2} \end{pmatrix},\ R_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \cdot (1+e) \\ 0 & 1 & \mu \cdot (1+e)/\alpha \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}.$$

Analog dazu ergibt sich für die Reflexion mit Rollbewegung aus den Gleichungen (1), (6) und (7) die Reflexionsmatrix R_R und für den ideal elastischen Aufprall eines Superballs ((9), (10), (11)) die Matrix R_S:

$$R_R = \begin{pmatrix} 1/(1+\alpha) & -\alpha/(1+\alpha) & 0 \\ -1/(1+\alpha) & \alpha/(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_S = \begin{pmatrix} 3/7 & -4/7 & 0 \\ -10/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mehrmaliges Aufprallen am Boden wird nun durch mehrmaliges Anwenden der Reflexionsmatrix beschrieben. Der Zustand des Balles vor dem 2. Aufprall wird aus dem Zustand nach der 1. Reflexion durch Vorzeichenwechsel der senkrechten Geschwindigkeitskomponente berechnet. Das lässt sich durch die Matrix D_1 darstellen,

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit D_1 ändert im Zustandsvektor das Vorzeichen der 3. verallgemeinerten Koordinate. Damit ergibt sich für ein 2-maliges Auftreffen des Balles am Boden $Z_3 = R \cdot D_1 \cdot R \cdot Z_1$. Für einen Superball ergibt sich: $D_1 \cdot Z_3 = Z_1$. Nach jeder 2. Reflexion ist wieder der ursprüngliche Zustand erreicht.

Die Reflexionen in Abbildung 3a im Text können nun auch berechnet werden:

1. Reflexion: $Z_2 = R\, Z_1$

2. Reflexion: Die x-Richtung der 1. Reflexion ist im Koordinatensystem der 2. Reflexion die negative y-Richtung, die y-Richtung der 1. Reflexion wird zur x-Richtung der 2. Reflexion. Dies geschieht durch die Matrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dadurch erhält man $Z_3 = R\, D_2\, Z_2$.

3. Reflexion:

Zur Berechnung der 3. Reflexion braucht man wieder den Zustand des Balles vorher. Unter der Annahme, dass der 2. Reflexionspunkt an der Wand sich fast in Bodenhöhe befindet, muss man die Wurfparabel nicht exakt ausrechnen, sondern kann die verallgemeinerten Koordinaten näherungsweise durch

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen. Dabei sind die Koordinaten so umgerechnet, dass die Reflexion wieder von links nach rechts erfolgt. Damit ergibt sich $Z_4 = R\, D_3\, Z_3$. Für weitere Reflexionen kann in analoger Weise mit dem Zustandsvektor $D_4\, Z_4$ mit

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

weiter gerechnet werden.

Literatur

[1] G. L. Strobel Am. J. Phys. **1968**, *36*, 834.
[2] R. L. Garwin, Am. J. Phys. **1969**, *37*, 88.