

1

Bewegung von Himmelskörpern

Bereits vor mehreren tausend Jahren erkannten Beobachter, dass sich die Himmelskörper in zwei Gruppen einteilen lassen, solche, die sich relativ zueinander nicht bewegen, die so genannten Fixsterne, und solche, die ihre relativen Positionen am Himmel verändern und die heute als Mitglieder des Sonnensystems zusammengefasst werden können. Ein wirkliches Verständnis jenseits abstrakter Beschreibungen wurde erst eröffnet, als I. Newton die Gravitationskraft als eine Grundkraft der Natur erkannte. In diesem ersten Kapitel befassen wir uns mit den Werkzeugen, mit denen Astronomen die Bewegungen von Himmelskörpern beschreiben. Zunächst besprechen wir die Grundlagen der Bewegung unter der Einwirkung der Gravitation.

1.1

Gravitation

Die Anziehungskraft F_G , die zwei im Abstand r voneinander befindliche Massen m_1 und m_2 aufeinander ausüben, wird durch das *Newtonsche Gravitationsgesetz* gegeben

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

mit G als einer universellen Konstante, der so genannten Gravitationskonstante. Gravitation ist also eine Wechselwirkung von Massen. In der Astronomie können die Himmelskörper meistens als punktförmig angenommen werden, die Massenverteilung im Innern der Himmelskörper kann also vernachlässigt werden (in Abschn. 1.2.5 gehen wir darauf ein, wann diese Approximation nicht mehr gemacht werden kann). Die Gravitationskraft ist ein Vektor, der immer in Richtung des Massenpunkts zeigt, der die Kraft ausübt, d. h. sie ist eine anziehende Kraft. Sie fällt mit zunehmender Entfernung nur langsam ab, $\propto r^{-2}$, reicht also „bis ins Unendliche“.

Diese Eigenschaften der Gravitation haben bedeutende Konsequenzen. Zum einen kann es kein absolut in Ruhe befindliches Bezugssystem geben, denn sobald man zwei Massen hat, werden sie zueinander beschleunigt. Ein Gebilde kann

nur stabil sein, wenn es durch eine entgegengerichtete Kraft vor dem Kollaps behütet wird. Zum anderen addieren sich Gravitationskräfte immer (vektoriell). Damit ist die Gravitation über die für die Astronomie typischen großen Entfernungen die alles beherrschende Größe. Das liegt an der äußerst begrenzten Reichweite der anderen Kräfte sowie an der Tatsache, dass elektromagnetische Kräfte nur zwischen geladenen Körpern wirken. Auf astronomischen Dimensionen ist jedoch alle Materie elektrisch neutral und unterliegt damit nur der Gravitation.

Seit Einsteins Relativitätstheorie wissen wir, dass die Newtonsche Formulierung des Gravitationsgesetzes, die eine Beschreibung in einem dreidimensionalen kartesischen (euklidischen) Raum beinhaltet, nur im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und schwacher Gravitationsfelder gültig ist. Allerdings sind die Abweichungen in den meisten Fällen so geringfügig, dass das Newtonsche Kraftgesetz weiterhin als sehr gute Näherung und als Grundlage der Mechanik von Himmelskörpern dienen kann.

1.2

Das Zweikörperproblem

Im einfachsten Fall lässt sich das Problem der Bewegung von Himmelskörpern im Gravitationsfeld reduzieren auf eine Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, z. B. der Sonne und einem Planeten. Durch die Kraft, mit der die Sonne (Masse m_1) einen anderen Körper des Sonnensystems (Masse m_2) anzieht, wird dieser dauernd aus seiner momentanen Bewegungsrichtung abgelenkt, ein wenig in Richtung zur Sonne hin beschleunigt, und so auf eine Bahn um die Sonne gezwungen. Die oben geforderte Gegenkraft wird allein durch die Fliehkraft bewirkt. Diese Bahnbewegung ist besonders einfach; die Beschreibung wird *Zweikörperproblem* genannt. In dieser Näherung wird also die Anziehungskraft zusätzlicher Körper, z. B. eines anderen Planeten, vernachlässigt. Wir gehen später in Abschn. 1.3 noch kurz darauf ein, wie kleine Abweichungen vom reinen Zweikörperproblem als „Störungen“ angenähert berücksichtigt werden können.

1.2.1

Keplersche Gesetze

In der klassischen Mechanik wird gezeigt, wie mit Gl. (1.1) eine Bewegungsgleichung aufgestellt und integriert werden kann, woraus sich die drei Keplerschen Gesetze ergeben, die die Bahnform und die Bewegung in der Bahn beschreiben. Sie wurden ursprünglich von Kepler in etwas vereinfachter Form allein aus der beobachteten Bewegung der Planeten, ohne Kenntnis des zugrunde liegenden Kraftgesetzes, abgeleitet.

Das 1. *Keplersche Gesetz* beschreibt die Bahnform: *Die Körper bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, die in einem der Brennpunkte steht.*

Eigentlich sind in einem solchen Gravitationsfeld alle Kegelschnitte als Bahnformen zugelassen. Für den wichtigsten Fall der gravitativen Bindung an ein Zentral-

objekt, z. B. an die Sonne oder einen anderen Stern, können wir uns aber auf Ellipsenbahnen beschränken, da Parabel- und Hyperbelbahnen ins Unendliche führen. Form und Größe einer Ellipse können wahlweise durch zwei der folgenden Parameter beschrieben werden (s. Abb. 1.1): Große Halbachse a , kleine Halbachse $b = a\sqrt{1 - e^2}$, Abstand Brennpunkt – Mittelpunkt f und Exzentrizität $e = f/a$. Für $e = 0$ entartet die Ellipse zu einem Kreis; wachsendes e (< 1) führt zu immer stärker abgeflachten Ellipsen. Die beiden Scheitelpunkte der Ellipse, also die Punkte mit der kleinsten bzw. größten Entfernung zum Zentralobjekt, haben spezielle Namen, die allerdings mit der Natur des Zentralobjekts variieren. Für Objekte im Sonnensystem heißt der sonnennächste Punkt der Bahn *Perihel*, der sonnenfernste *Aphel*. Im Falle einer Umlaufbahn um die Erde sind die entsprechenden Ausdrücke *Perigäum* und *Apogäum*, und für andere Sterne *Periastron* und *Apastron*. Die Verbindungslinie zwischen den beiden Scheitelpunkten heißt *Apsidenlinie*.

Für die absolute räumliche Bewegung (statt der hier beschriebenen Relativbewegung) erhält man ein ganz entsprechendes Ergebnis, nämlich dass beide Körper sich auf ähnlichen Ellipsen (gleiches e) um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Dieser Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie beider Massen, um die Strecke $r \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ von m_1 entfernt.

Das 2. *Keplersche Gesetz* beschreibt die Geschwindigkeit, mit der verschiedene Teile der Bahn durchlaufen werden. Es wird auch *Flächensatz* genannt und lautet: *Der von der Sonne zum umlaufenden Himmelskörper gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen*. Diese Aussage ist der Ausdruck der Erhaltung des Bahndrehimpulses. Aus dem Flächensatz folgt, dass in jeweils gleichen Zeiträumen nahe beim Perihel (kleinster Radiusvektor) ein relativ großes Bahnstück zurückgelegt wird, nahe beim Aphel (größter Radiusvektor) dagegen ein relativ kurzes Bahnstück (s. Abb. 1.1). Demzufolge ist die Bahngeschwindigkeit im Perihel am größten, im Aphel am kleinsten.

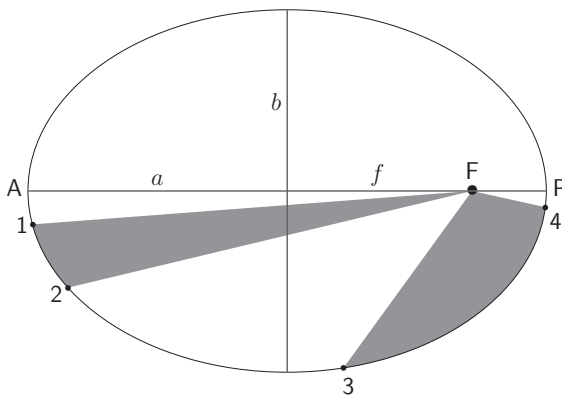


Abb. 1.1 Bestimmungsgrößen einer Ellipse mit Brennpunkt F. Die schraffierten, gleich großen Flächen erläutern das 2. Keplersche Gesetz. a und b bezeichnen die große und kleine Halbachse, f den Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt und A und P das Aphel bzw. das Perihel.

Das 3. Keplersche Gesetz verknüpft Umlaufzeit U und große Halbachse a der Bahn. Das Quadrat der Umlaufzeit wächst proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse und umgekehrt proportional zur Massensumme:

$$U^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}. \quad (1.2)$$

Im Sonnensystem kann man in guter Näherung die Massensumme durch die Sonnenmasse m_1 ersetzen, da für alle anderen Körper $m_2 \ll m_1$ gilt. Dann ergibt sich die ursprüngliche, vereinfachte Aussage, dass $U^2 \propto a^3$ ist. Natürlich ist diese Vereinfachung unzulässig, wenn dieses Gesetz auf vergleichbar große Massen, z. B. bei Doppelsternen, angewendet wird.

Im Folgenden skizzieren wir eine kurze Ableitung der Keplerschen Gesetze. Wir gehen von den Bewegungsgleichungen für die beiden Massen m_1 und m_2 aus, die sich bei den Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 befinden (s. Abb. 1.2), einen Verbindungsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ haben und die sich gemäß Gl. (1.1) anziehen:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

wobei wir jetzt das Gravitationsgesetz in seiner vektoriellen Formulierung verwenden. Subtraktion beider Gleichungen ergibt für die Relativbewegung die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.4)$$

Multipliziert man diese Gleichung vektoriell mit \mathbf{r} , so ergibt sich $(\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = 0$.

Hier steht links die zeitliche Ableitung eines Vektorprodukts, das wir $\mathbf{N} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$ nennen. Man kann nämlich schreiben

$$(\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \mathbf{N} = 0. \quad (1.5)$$

Daraus folgt $\mathbf{N} = \text{const.}$, also die Aussage des Drehimpulssatzes, da \mathbf{N} bis auf den Faktor m_2 den Drehimpuls von m_2 bezüglich m_1 darstellt.

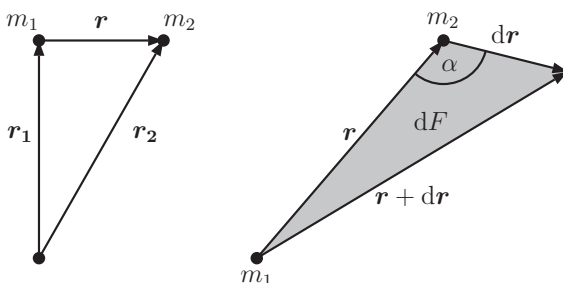


Abb. 1.2 Links: Bezeichnungen der Größen für die Bewegungsgleichung im Zweikörperproblem. Rechts: Vektoren beim Flächensatz.

In Abb. 1.2 ist das Flächenelement dF skizziert, das der Vektor \mathbf{r} in der Zeit dt , in der er sich um $d\mathbf{r}$ ändert, überstreicht. Dieses Flächenelement ist

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \sin \alpha dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot N dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

Da N konstant ist, hat man $dF/dt = \text{const.}$, also das 2. Keplersche Gesetz.

Um die Bahnform zu erhalten, multipliziert man Gl. (1.4) vektoriell mit $\mathbf{N} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$ und rechnet das doppelte Vektorprodukt auf der rechten Seite aus. Wenn man mit \dot{r} die Änderung des Betrages (nicht den Betrag der Änderung des Vektors!) bezeichnet, so ergibt sich

$$(\mathbf{N} \times \ddot{\mathbf{r}}) = -G \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^3} \cdot [(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}] = -G(m_1 + m_2) \cdot \left(-\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} \right) .$$

Hier ist die Klammer auf der rechten Seite offensichtlich gleich der zeitlichen Ableitung von $-\mathbf{r}/r$, so dass sich diese Gleichung sofort über die Zeit integrieren lässt, da der Vektor \mathbf{N} auf der linken Seite konstant ist; mit \mathbf{C} als Integrationskonstante wird so

$$(\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{r}}) = G(m_1 + m_2) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{C} .$$

Diese Gleichung wird skalar mit \mathbf{r} multipliziert, woraus sich links

$$(\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{N} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = N^2 ,$$

also insgesamt

$$N^2 = G(m_1 + m_2)r + \mathbf{C} \cdot \mathbf{r} = G \cdot (m_1 + m_2) r + C r \cos \nu$$

ergibt, wobei ν der Winkel zwischen \mathbf{C} und \mathbf{r} ist. Diese Gleichung kann nach r aufgelöst werden. Die entstehende Gleichung stellt die Polargleichung eines Kegelschnittes dar, nämlich

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} , \quad \text{mit} \quad p = \frac{N^2}{G(m_1 + m_2)} \quad \text{und} \quad e = \frac{C}{G(m_1 + m_2)} \quad (1.7)$$

(1. Keplersches Gesetz).

Multipliziert man die (konstante) Flächengeschwindigkeit $N/2$ (Gl. 1.6) mit der Umlaufzeit U , so muss sich offenbar die Fläche der Ellipse ergeben,

$$\frac{N}{2} \cdot U = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} .$$

Hieraus ergibt sich durch Quadrieren und Ersetzen von e sofort das 3. Keplersche Gesetz (Gl. 1.2), wenn man sich zur Elimination von e die doppelte große Halbachse a aus Gl. (1.7) ausrechnet

$$2a = r_{v=0} + r_{v=\pi} = 2 \frac{p}{1 - e^2}.$$

Für Kreisbahnen und kreisähnliche Ellipsen mit $e \ll 1$ folgt hieraus übrigens

$$a \approx \frac{N^2}{G(m_1 + m_2)}, \quad (1.8)$$

was besagt, dass der Drehimpuls $J \propto a^{1/2}$ wächst und die Kreisbahngeschwindigkeit $v_K \propto a^{-1/2}$ abnimmt, da $J \propto N$ und $J \propto a v_K$.

1.2.2

Bahnbestimmung

Eine Ellipse im Raum wird durch fünf Parameter festgelegt: den beiden Halbachsen, dem Neigungswinkel gegen die Bezugsebene (im Sonnensystem normalerweise die Ekliptik) und der Lage der Durchstoßungspunkte der Ellipse durch diese Ebene, den so genannten Knoten. Zusätzlich wird die zeitabhängige Position des Körpers (Planet, Komet etc.) auf der Ellipse benötigt, die üblicherweise angegeben wird als der Zeitpunkt des Durchgangs durch den dem Zentralobjekt nächsten Punkt (im Sonnensystem: das Perihel). Die *Bahn* eines Himmelskörpers ist somit durch Angabe dieser sechs *Bahnelemente* vollständig charakterisiert; kennt man ihre Zahlenwerte, lässt sich die Position des Planeten im Raum zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnen.

Zur Bestimmung der sechs Bahnelemente eines Himmelskörpers auf einer Keplerbahn benötigt man offensichtlich wenigstens sechs unabhängige Einzelmessungen, die die Bahn erfassen, sowie die Zeitpunkte der Messungen. Kann man beispielsweise sowohl den Ort \mathbf{r} und die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ eines Himmelskörpers in jeweils allen drei vektoriellen Komponenten zum Zeitpunkt t messen, so ist die Bahn bereits vollständig festgelegt. Statt der Geschwindigkeiten kann man auch zwei zu verschiedenen Zeiten gemessene Positionen $\mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}(t_2)$ verwenden.

Die astronomische Beobachtung von der Erde liefert jedoch zunächst nur *Richtungen*, d. h. Polarkoordinaten, ohne die zur Festlegung der Position im Raum erforderlichen Entfernungen (s. Abschn. 1.5). In diesem Fall benötigt man mindestens *drei* unabhängige Messungen, was je Messung zwei Richtungswinkel liefert, also wiederum sechs Bestimmungsstücke. Allerdings hängt dann die Bahn im Raum noch von einer linearen Skalierung ab, die z. B. über eine Bestimmung der Größe der Erdbahn erhalten werden kann (die so genannte *Astronomische Einheit*, s. Abschn. 4.1).

Der mathematische Apparat zur Bahnbestimmung ist recht aufwendig, u. a. wegen der zahlreichen erforderlichen Koordinatentransformationen. Es gibt jedoch inzwischen eine Vielzahl von Computerprogrammen, die diese Aufgabe erledigen.

Das umgekehrte Problem der Vorhersage beobachtbarer Positionen aus bekannten Bahnen heißt *Ephemeridenrechnung* (aus dem Griechischen „ephemeris – für einen Tag“; eine Ephemeride ist eine Tabelle mit berechneten Positionen eines Himmelskörpers). Dieser Vorgang ist einfacher als die Bahnbestimmung und basiert letztendlich auf der Anwendung der Bahngleichung (1.7) sowie des 2. Keplerschen Gesetzes, gefolgt von einigen Koordinatentransformationen. Auch hierfür gibt es etliche Computerprogramme.

1.2.3

Kreisbahnen

Sehr häufig lassen sich Bahnen von Himmelskörpern recht gut als Kreisbahnen approximieren, also als Ellipsen mit $a \approx b$. Beispielsweise ist für die Erdbahn um die Sonne $e = 0.017$ (s. Abschn. 4.2.2), a und b unterscheiden sich also nur um 0.015%. Selbst bei der Merkurbahn, die mit $e \simeq 0.2$ (s. Tabelle 4.2) die größte Exzentrizität der Planeten des Sonnensystems aufweist, beträgt der Unterschied zwischen a und b gerade einmal 2%, was mit dem bloßen Auge kaum von einer Kreisbahn zu unterscheiden sein dürfte.

Die Beschreibung einer Bahn als Kreisbewegung hat rechentechnisch ungeheure Vorteile. Insbesondere wird das 2. Keplersche Gesetz zu einer trivialen Aussage, da die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn konstant ist. Diese *Kreisbahngeschwindigkeit* v_K erhalten wir aus der Gleichsetzung von Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung im Abstand a von der Zentralmasse M ,

$$\frac{G M}{a^2} = \frac{v_K^2}{a}, \quad (1.9)$$

was direkt auf

$$v_K = \sqrt{\frac{G M}{a}} \quad (1.10)$$

führt. Natürlich ist dies nichts anderes als das 3. Keplersche Gesetz für den Spezialfall einer Kreisbahn, wie man sich durch Ersetzen von $v_K = 2\pi a/U$ sofort überzeugen kann.

1.2.4

Entweichgeschwindigkeit

Um das Gravitationsfeld verlassen zu können, muss die kinetische Energie eines Körpers $1/2 m v^2$ mindestens gleich der potentiellen Energie $G M m/a$ im Startpunkt mit dem Abstand a vom Zentrum sein. Durch Gleichsetzen beider Energien erhält man die für das Entweichen erforderliche Grenzgeschwindigkeit

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{a}} = \sqrt{2} \cdot v_K. \quad (1.11)$$

Sie wird auch parabolische Geschwindigkeit genannt, da sie die Geschwindigkeit für eine Bewegung auf einer Parabel beschreibt, die ja als Grenzfall zwischen

Ellipsen und Hyperbeln gerade schon ins Unendliche führt. Dieser Sachverhalt kann verallgemeinert und umgekehrt werden. Ein Körper, der ohne nennenswerte kinetische Energie von sehr weit kommend in ein Gravitationspotential hineinfällt, hat in jeder Entfernung r ungefähr die Entweichgeschwindigkeit. Oder: im Zweikörperproblem verlässt ein Testkörper, der aus dem „Unendlichen“ kommt, das System wieder.

1.2.5

Gezeitenkräfte

Sind zwei Körper so eng benachbart, dass ihre Radien nicht mehr vernachlässigbar gegenüber ihrem Abstand sind, so hat die gegenseitige Anziehungskraft auch eine Wirkung auf die Form der Körper und kann im Extremfall zu ihrer Zerstörung führen. Aufgrund der r^{-2} -Abstandsabhängigkeit wirken die Anziehungskräfte auf die nahe und die ferne Seite eines Körper unterschiedlich stark. Zur besseren Abschätzung der Größenordnung des Effekts betrachten wir zwei punktförmige Massenelemente der Masse dm , die sich im Abstand $2R$ voneinander und im Abstand d zu einer größeren (Punkt-)Masse M befinden (s. Abb. 1.3).

Die zwei Massenelemente könnten z. B. zwei Punkte auf Vorder- und Rückseite eines Planeten oder Mondes darstellen, aber auch zwei Sterne in einer Zwerggalaxie, die sich in der Nähe einer großen Galaxie befindet. Die durch M auf die beiden Massenelemente ausgeübte Anziehungskraft unterscheidet sich um den Betrag

$$\Delta F_G = \frac{GM dm}{(d-R)^2} - \frac{GM dm}{(d+R)^2} = G \frac{M dm}{d^2} \left(\frac{1}{(1-R/d)^2} - \frac{1}{(1+R/d)^2} \right). \quad (1.12)$$

Für $R/d \ll 1$ können wir diesen Ausdruck durch eine Reihenentwicklung vereinfachen,

$$\Delta F_G \approx G \frac{M dm}{d^2} \left(1 + 2 \frac{R}{d} - \left(1 - 2 \frac{R}{d} \right) \right) = 4GM dm \frac{R}{d^3}. \quad (1.13)$$

Mit dieser Kraft werden die beiden Massenelemente auseinandergezogen. Der Betrag der Kraft hängt in dieser Näherung von der dritten Potenz des Abstands d ab, ΔF_G wird also relevant vor allem bei kleinen Abständen d . Sind die beiden Massenpunkte Teile eines größeren Körpers, dann wird dieser in Richtung der Verbindungslinie der beiden Körper verformt. Für das Erde-Mond-System ergibt sich so das Phänomen der Gezeiten auf der Erdoberfläche, insbesondere in Verbindung mit der Erdrotation (s. Abschn. 4.3.1). Man spricht häufig ganz generell von Gezeitenkräften, wenn Gln. (1.12) bzw. (1.13) anwendbar sind.

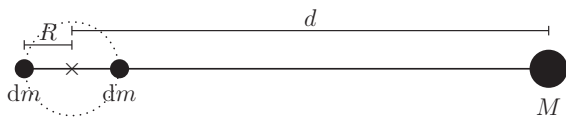


Abb. 1.3 Bezeichnungen zur Ableitung der Gezeitenkräfte.

Gezeitenkräfte sind von großer Bedeutung in der Astrophysik. So legen sie fest, bis zu welchem Abstand ein Mond in der Nähe zu einem Planeten überhaupt existieren kann (s. Abschn. 4.5). Zwei Sterne in einem engen Doppelsternsystem verformen sich gegenseitig durch Gezeitenkräfte in ganz charakteristischer Weise (s. Abschn. 8.6). Auch für die Entwicklung von Galaxien spielen Gezeitenkräfte eine erhebliche Rolle (s. Abschn. 12.6.4).

1.3

Mehr- und Vielteilchensysteme

Die Behandlung der Bewegung im Gravitationsfeld wird schwierig, sobald man das Konzept des reinen Zweikörperproblems aufgibt. Das liegt daran, dass sich mit der Bewegung der Körper auch das Gravitationsfeld verändert. Für ein Zweikörperproblem gilt noch, dass relativ zum Schwerpunkt des Systems das Gravitationsfeld als vorgegeben betrachtet werden kann, aber für mehr als zwei unabhängige Massenpunkte ist dies im Allgemeinen nicht mehr möglich. Bereits beim Dreikörperproblem können Rückkopplungen eintreten, die zu chaotischem, nicht langfristig vorhersagbarem Verhalten führen. Daher gibt es für Systeme mit mehr als zwei Teilchen keine allgemeinen analytischen Lösungen der Bewegungsgleichungen. Für ein n -Teilchensystem gibt es n solcher Gleichungen,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{G m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Dieses System gekoppelter Differentialgleichungen lässt sich – nach Spezifikation der Anfangsbedingungen – nur durch numerische Integration näherungsweise lösen. Für einige Spezialfälle gibt es allerdings analytische, stabile Lösungen, von denen wir im Folgenden zwei besonders einfache, für die Astrophysik aber bedeutende Fälle diskutieren.

1.3.1

Reduziertes Dreikörperproblem

Eine besonders einfache Situation ergibt sich, wenn in einem System mit drei Punktmassen eine davon so klein ist, $m_3 \ll m_1, m_2$, dass das Gravitationsfeld von der Position dieses „Probeteilchens“ unabhängig ist. Wenn $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ die Ortsvektoren des Teilchens bezogen auf die Massen 1 und 2 bezeichnen, dann ist die Schwerkraft auf das Teilchen

$$\mathbf{F}_G = -G m_3 \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \right). \quad (1.15)$$

In einem stabilen Gleichgewicht werden sich die Körper 1 und 2 auf Keplerbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt befinden. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass es sich dabei um Kreisbahnen handelt, deren Umlaufgeschwindigkeit durch eine Kreisfrequenz ω beschrieben wird. Betrachten wir nun ein mit

ω mitrotierendes Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Systems liegt. In diesem Bezugssystem sind die Ortsvektoren der Massen 1 und 2 invariant, das Gravitationsfeld ist also eine reine Funktion des Orts und hängt nicht mehr von der Zeit ab. Allerdings muss zusätzlich zur Gravitation noch die Zentrifugalbeschleunigung aufgrund der Rotation des Systems berücksichtigt werden.

Zur Suche nach stabilen Bahnen für das Probesteilchen ist es nützlich, den Verlauf des „effektiven Potentials“

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{G m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} - \frac{G m_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2, \quad (1.16)$$

zu betrachten, wobei s der Abstand des Probesteilchens von der Rotationsachse (nicht vom Schwerpunkt!) ist. In Abb. 1.4 ist ein Beispiel für den Verlauf dieses Potentials als „Höhenlinienkarte“ gezeigt.

Stabile Bahnen des Testteilchens ergeben sich insbesondere dort, wo das effektive Potential ein lokales Minimum oder Maximum hat, denn dort verschwindet der Gradient und das Teilchen ist (im rotierenden System) kräftefrei. Die Abb. 1.4 zeigt, dass es fünf solcher Punkte gibt, die so genannten *Lagrange-Punkte*, die üblicherweise mit dem Buchstaben L und einem Zahlenindex bezeichnet werden.

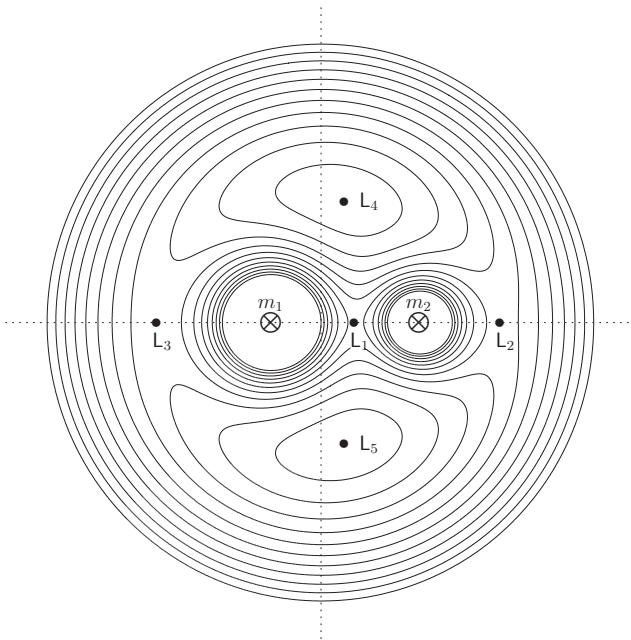


Abb. 1.4 Effektives Potential in einem System zweier um den gemeinsamen Schwerpunkt rotierender Massen, mit $m_1 = 2m_2$. Die schwarzen Punkte markieren die Lagrange-Punkte. Der Schwerpunkt des Systems liegt im Schnittpunkt der gestrichelten Linien.

Diese Zusammenhänge sind von großer Bedeutung für viele in der Astrophysik betrachtete Systeme und wir werden diese Überlegungen an mehreren Stellen wieder aufgreifen. Beispielsweise sind die Lagrange-Punkte L_1 und L_2 des Systems Erde-Sonne besonders attraktive Orte für die Positionierung von Satellitenobservatorien (s. Abschn. 3.4.3 und 4.2.3). Im System Jupiter-Sonne halten sich in den Punkten L_4 und L_5 ganze Gruppen von Asteroiden auf, die so genannten Trojaner. Und in engen Doppelsternsystemen kann es dazu kommen, dass Materie von einem Stern zum anderen durch den inneren Lagrange-Punkt L_1 überfließt (s. Abschn. 8.6).

1.3.2

Störungsrechnung

Streng genommen ist das reine Zweikörperproblem natürlich eine völlig unrealistische Idealisierung; bereits das Sonnensystem besteht aus vielen Planeten, die sich alle irgendwie gegenseitig beeinflussen. Allerdings ist z. B. die Auswirkung des Jupiter auf die Bahnen der inneren Planeten gering, wenn auch nicht völlig vernachlässigbar. Für solche Fälle gibt es in der Physik den Ansatz der *Störungsrechnung*, wobei dann angenommen wird, dass die Lösung durch eine Überlagerung der Lösung des idealisierten Zweikörperproblems mit einem Korrekturterm konstruiert werden kann.

Eine mögliche Vorgehensweise besteht in einer Reihenentwicklung des Potentials; zu dem einfachen Zentralmassenpotential addiert man Terme höherer Ordnung, die die Störungen repräsentieren sollen. In seiner einfachsten Form wäre

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{B}{r^2} + \dots \quad (1.17)$$

mit dem zu ermittelnden „Störterm“ B . Für das Sonnensystem bedeutet dieser Ansatz anschaulich, dass die Wirkung der äußeren Planeten ersetzt wird durch die Gravitation eines gedachten äußeren Masserings. Auch für dieses Kraftgesetz gibt es eine analytische Lösung, die wir hier allerdings nicht ausführen können. Die resultierende Bahngleichung lautet

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\alpha\phi)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{1 - B}, \quad (1.18)$$

was gegenüber der bekannten Form aus Gl. (1.7) nur durch den Vorfaktor α unterschieden ist. Wenn $B = 0$, so ist $\alpha = 1$ und die Bahn ist eine Kepler-Ellipse. Für $B \neq 0$ allerdings sind die Bahnen keine geschlossenen Ellipsen mehr, sondern offene Rosettenbahnen. Für sehr kleine B ($\alpha \approx 1$) gilt, dass die Lösungen nahezu Ellipsenbahnen sind, deren Apsidenlinie sich allerdings im Laufe der Zeit um einen kleinen Winkel weiterdreht. Historisch bedeutend ist die *Periheldrehung des Merkur*, die im 19. Jahrhundert entdeckt wurde und etwa $5.7''$ im Jahr beträgt (das entspricht einer 360° -Drehung der Apsidenlinie in 227 000 Jahren). Berücksichtigt man die Störungen der Merkurbahn durch Erde, Venus und Jupiter, so kommt man jedoch nur auf den etwas kleineren Wert von $5.3''$ pro Jahr. Die Diskrepanz

konnte lange nicht erklärt werden und führte u. a. sogar dazu, dass die Existenz eines noch unbekannt massereichen Planeten im Sonnensystem postuliert wurde. Erst als Einstein zeigen konnte, dass aus der allgemeinen Relativitätstheorie eine zusätzliche Drehung der Apsidenlinie des Merkur von genau den fehlenden $0.4''$ pro Jahr folgt, war der Widerspruch aufgelöst.

1.3.3

Energieerhaltung und Virialsatz

Systeme mit sehr vielen Teilchen, die gemeinsam für das resultierende Gravitationsfeld verantwortlich sind, lassen sich im Allgemeinen auch nicht mehr näherungsweise durch das Kepler-Modell erfassen. Es können aber oft gewisse statistische Aussagen gemacht werden, die zwar nicht das Verhalten einzelner Teilchen genau beschreiben, wohl aber das mittlere Verhalten des Ensembles von Teilchen.

Betrachten wir ein Ensemble von n Teilchen mit Massen m_i . Die kinetische Gesamtenergie des Ensembles ist

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (1.19)$$

wobei die Richtungen der einzelnen Geschwindigkeiten sehr unterschiedlich sein können. Wenn ausschließlich Gravitationskräfte auf die Teilchen wirken, ist die potentielle Energie des ganzen Systems

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^n m_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (1.20)$$

Jeder Körper, der im Gravitationsfeld eine Kraft erfährt und somit beschleunigt wird, gewinnt an kinetischer Energie in genau dem Maße, indem er an potentieller Energie verliert, da die geleistete Arbeit $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ unabhängig von der tatsächlichen Bahn ist. Andererseits kann Energie auch – etwa durch einen Stoß – von einem Teilchen auf ein anderes übertragen werden, wobei grundsätzlich der Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie gilt,

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} \quad (1.21)$$

In dieser Formulierung des Energieerhaltungssatzes steckt natürlich noch die Annahme, dass dem System nicht auf andere Weise Energie entzogen werden kann. Viele astrophysikalische Gebilde verlieren aber Energie insbesondere durch Abstrahlung und sind daher keine abgeschlossenen Systeme. Es gilt dann nur noch ein modifizierter Erhaltungssatz, der explizit die Energieverluste mit einbezieht.

Eine fundamentale Aussage über Vielteilchensysteme ist der *Virialsatz*. Er besagt, dass sich die Gesamtenergie nicht beliebig über kinetische und potentielle Energie verteilt, solange sich das System im Gleichgewicht befindet. Vielmehr strebt das System im zeitlichen Mittel zu einem festen Verhältnis,

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}} = -E_{\text{ges}}. \quad (1.22)$$

Zum Beweis des Virialsatzes betrachten wir die zeitliche Ableitung der Größe $\mathcal{V} = \sum \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i$ (des so genannten „Virials“) für ein System von n Teilchen:

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i.$$

Auf der rechten Seite können wir ersetzen $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (Kraft ist gleich Impulsänderung) und $E_{\text{kin}} = m v^2/2 = p^2/2m$, also

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2 E_{\text{kin}}. \quad (1.23)$$

Das langzeitliche Mittel des Virials \mathcal{V} erhalten wir durch Integration über t ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t'=0}^t \frac{d\mathcal{V}}{dt} dt' = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \{ \mathcal{V}(t) - \mathcal{V}(0) \} \right] = 0. \quad (1.24)$$

Wir machen jetzt Gebrauch von der Tatsache, dass sich die Kraft im Gravitationsfeld vektoriell aus den Anziehungskräften F_{ij} der einzelnen Massenpunkte aufeinander zusammensetzen lässt. Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (1.23) lässt sich dann schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j < i}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i - \sum_{j > i}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \end{aligned}$$

wobei wir von der Symmetrie des Newtonschen Kraftgesetzes ($F_{ij} = -F_{ji}$) Gebrauch gemacht haben. Das Skalarprodukt $\mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ist aber einfach $G m_1 m_2 / r_{ij}$, also die potentielle Energie von m_1 bezüglich m_2 . Die Aufsummierung ergibt gerade die potentielle Gesamtenergie (vgl. Gl. 1.20), also

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = E_{\text{pot}}. \quad (1.25)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung sowie $d\mathcal{V}/dt = 0$ (s. Gl. 1.24) in Gl. (1.23) erhalten wir sofort Gl. (1.22), den Virialsatz. Er gilt, das sei noch einmal betont, nicht für jedes mechanische System, sondern streng genommen nur im Langzeitmittel für Systeme, die einen Gleichgewichtszustand erreicht haben.

Diese Annahme ist allerdings für eine Vielzahl astrophysikalischer Systeme in recht guter Näherung erfüllt. Beispielsweise beschreibt der Virialsatz für Sterne einen Zusammenhang zwischen der potentiellen Energie eines Sterns und seiner mittleren Temperatur (s. Abschn. 7.1.2). In Galaxienhaufen kann man über den Virialsatz aus den gemessenen Geschwindigkeiten der einzelnen Galaxien eine Abschätzung der Gesamtmasse des Haufens erhalten (s. Abschn. 13.4). Im Einzelfall muss jedoch immer wieder überprüft werden, ob die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Virialsatzes erfüllt sind.

1.4

Zur allgemeinen Relativitätstheorie

Im Rahmen der klassischen Physik sind Raum und Zeit grundverschiedene Kategorien in der Beschreibung der Natur. Insbesondere ist die Zeit etwas Absolutes; die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist unabhängig vom Betrachter zu konstatieren. Dagegen stellte die 1905 von A. Einstein erstmals formulierte „spezielle Relativitätstheorie“ ein Konzept zur Verknüpfung von Raum und Zeit dar, das im Wesentlichen auf zwei Postulaten begründet war: Erstens, die Annahme der Gleichwertigkeit aller „Inertialsysteme“, d. h. unbeschleunigt gegeneinander bewegter Koordinatensysteme, und zweitens, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom System des Betrachters.

Mit seiner „allgemeinen Relativitätstheorie“ von 1916 verallgemeinerte Einstein seinen Ansatz auf solche Vorgänge, die sich in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern abspielen. Die spezielle Relativitätstheorie ist darin noch als Grenzfall für Inertialsysteme und für verschwindend kleine Gravitationsfelder enthalten. Der wichtigste Zusatz war Einsteins Annahme der Gleichheit von träger und schwerer Masse, die eine völlig gleichartige Behandlung von beschleunigten Systemen und der Schwerkraft unterliegenden Systemen erlaubte. Berühmt geworden ist Einsteins Fahrstuhl-Gedankenexperiment: Zunächst befindet sich der Fahrstuhl im freien Fall, was die Insassen als effektive Schwerelosigkeit erleben. Wird er hingegen weitab der Erde mit einer Beschleunigung g nach oben gezogen, ist dies für die Insassen ununterscheidbar von normaler Gravitationskraftwirkung.

1.4.1

Grundzüge

Wie schon in der speziellen Relativitätstheorie darf man auch in der allgemeinen nicht den Raum einerseits und die Zeit andererseits als für sich selbst definierte und voneinander unabhängige Größen betrachten. Jeder Vorgang ist vielmehr im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, kurz *Raumzeit* genannt, zu beschreiben. In ihr wird ein „Ereignis“, etwa das Vorhandensein eines Körpers an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit, durch die Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 beschrieben. Dabei können wir zum Beispiel für x_1, x_2, x_3 die kartesischen Koordinaten des betreffenden Raumpunktes und für x_0 die zeitliche Koordinate ct wählen, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Den von einem Körper in der Raumzeit zurückgelegten Weg nennt man seine *Weltlinie*.

An die Stelle des Newtonschen Bewegungsgesetzes tritt in der allgemeinen Relativitätstheorie eine Aussage über den von einem Körper in der Raumzeit durchlaufenen Weg: Die Weltlinie zwischen A und B ist eine so genannte *Geodäte*; das ist unter allen Verbindungslinien diejenige mit minimaler Länge (genauer: deren Länge einen Extremalwert annimmt). Das Analogon im gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum ist eine Gerade, die ja die kürzeste Verbindung zwi-

schen zwei Punkten darstellt. Ein einfaches Beispiel für eine solche Geodäte stellt ein Großkreis auf einer Kugeloberfläche dar.

Körper, die sich in Gravitationsfeldern bewegen, werden in der Regel nicht einfach gerade Linien zurücklegen. In Anwesenheit von Gravitationsfeldern, also in der Umgebung von gravitierenden Körpern, muss die Raumzeit also „gekrümmt“ sein. Der Zusammenhang zwischen der Verteilung von gravitierender Materie einerseits und den resultierenden Krümmungseigenschaften des Raums andererseits wird durch die *Einsteinschen Feldgleichungen* beschrieben. Diese stellen damit den Ersatz für das Newtonsche Gravitationsgesetz dar, das sie für den Grenzfall schwacher Felder genau reproduzieren.

Es stellt sich die Frage, wie man denn in beliebig gekrümmten Räumen überhaupt die Länge einer gegebenen Kurve misst. Dieses mathematische Problem wird in der Differentialgeometrie behandelt. Angenommen, man weiß, wie groß die Entfernung ds zwischen infinitesimal dicht benachbarten Punkten ist, dann erhält man die Gesamtlänge sofort als ein Wegintegral über alle Wegelemente ds . Die Schwierigkeit liegt in der Bestimmung von ds . Betrachten wir dazu zunächst einen dreidimensionalen euklidischen Raum mit einem kartesischen Koordinatensystem. Die einzelnen Punkte auf der Kurve mögen sich in ihren Koordinaten um die Beträge dx_1, dx_2, dx_3 unterscheiden. In diesem Fall ist die Antwort einfach: Es gilt der Satz des Pythagoras,

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \quad (1.26)$$

In einem gekrümmten Raum gilt diese Regel aber im Allgemeinen nicht. Die Richtungen der Koordinatenachsen ändern sich von Ort zu Ort, und damit auch die Winkel zwischen den Achsenrichtungen. Immerhin kann man für infinitesimale Wegsegmente die Krümmung selbst vernachlässigen und die Koordinatendifferenzen zwischen Punkten durch lineare Stücke dx_i annähern. Dann lässt sich die Länge des Wegelements ds in voller Allgemeinheit durch eine Kombination der Form

$$(ds)^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j \quad (1.27)$$

ausdrücken. Die g_{ij} sind Koeffizienten, die die spezifische Geometrie des betrachteten Raumes festlegen; natürlich sind die g_{ij} selbst Funktionen des Orts und ggf. auch der Zeit. Für den einfachen Fall des dreidimensionalen euklidischen Raums (Gl. 1.26) ist $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ und $g_{ij} = 0$ für $i \neq j$. In der allgemeinen Relativitätstheorie fasst man die g_{ij} zu einem so genannten *metrischen Tensor* \mathbf{g}_{ij} zusammen; man spricht auch kurz von der *Metrik* eines gegebenen Raums.

Mit dem metrischen Tensor ausgestattet, kann man dann die Längen von verschiedenen Verbindungen zwischen zwei Punkten berechnen. Jede Linie, deren Länge gegenüber benachbarten Kurven ein (lokales) Minimum oder Maximum aufweist, stellt eine mögliche Kurve dar, auf der sich ein Körper in diesem Schwerefeld durch die Raumzeit bewegt. Übrigens gilt dies ebenfalls, so eine weitere wichtige Aussage der allgemeinen Relativitätstheorie, für den Ausbreitungsweg

von Licht. Aus diesem Extremalprinzip lassen sich damit auch die Bedingungen für den *Gravitationslinseneffekt* (s. Abschn. 13.5.2) herleiten. Weitere astrophysikalisch relevante Auswirkungen der allgemeinen Relativitätstheorie sind die bereits erwähnte langsame Drehung der Apsidenlinien von Planetenbahnen, z. B. des Merkur, die Gravitationsrotverschiebung von elektromagnetischer Strahlung, die Existenz Schwarzer Löcher (s. Abschn. 1.4.2 und 8.5.4) sowie die Entstehung von Gravitationswellen (Abschn. 2.4.3). Aber selbst im modernen Alltag sind die Konsequenzen der Relativitätstheorie spürbar: Obwohl die relativistischen Effekte auf der Erdoberfläche winzig klein sind, würden alle GPS-Geräte ohne entsprechende Korrekturen ihre Positionen um typischerweise mehrere 100 m verfälscht anzeigen.

1.4.2

Starke Gravitationsfelder

Betrachten wir noch einmal die Abhängigkeit der Kreisbahn- und der Entweichgeschwindigkeit vom Abstand zur Zentralmasse (Gln. 1.10 und 1.11). Es ergibt sich der einfache Sachverhalt, dass die Geschwindigkeiten in der Nähe großer Massen umgekehrt proportional zur Wurzel des Abstands sind und für Punktmassen rein formal über alle Grenzen wachsen. Für Geschwindigkeiten gibt es aber eine physikalische obere Grenze, die Lichtgeschwindigkeit c . Wenn die Entweichgeschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit annähert, spricht man von „starken Gravitationsfeldern“. Im Grenzfall können wir die Entweichgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit setzen, $v_e = c$. Aus Gl. (1.11) ergibt sich dann der so genannte *Schwarzschild-Radius* r_S ,

$$r_S = \frac{2 G M}{c^2} . \quad (1.28)$$

Für die Masse der Sonne ergibt sich $r_S \sim 3$ km. Allgemein sieht man, dass eine ungeheure Kompression der Masse erforderlich wäre, um den Radius eines Körpers auf $R < r_S$ zu bringen. Dann jedoch könnte nicht einmal ein Photon entweichen, denn an der Oberfläche eines solchen hypothetischen Körpers wäre $v_e > c$, was, wie gesagt, unmöglich ist.¹⁾ Als Bezeichnung für eine derartige Konfiguration hat sich der Begriff „*Schwarzes Loch*“ eingebürgert.

Allerdings stellt der Schwarzschild-Radius keine wohldefinierte „Oberfläche“ einer Massenverteilung dar wie etwa die feste Oberfläche der Erde. Man kann lediglich von einem „Ereignishorizont“ sprechen, von jenseits dessen man keine Informationen mehr bekommt. Daher kann auch experimentell keine Aussage über die Verteilung der Masse innerhalb eines Schwarzen Loches gemacht werden.

1) Diese Aussage folgt genau genommen nicht aus der obigen „Herleitung“, denn die kinetische Energie eines Photons ist nicht einfach gleich $mc^2/2$. Es zeigt sich aber, dass Gl. (1.28) auch in einer strengen relativistischen Herleitung den Grenzfall beschreibt, wonach für $r < r_S$ keine elektromagnetische Strahlung mehr entkommen kann.

1.5 Koordinatensysteme

Zur Beschreibung der Position eines Körpers im Raum benötigt man ein Koordinatensystem. In der Astronomie ist die Bestimmung der *Entfernung* zu einem Körper sehr oft äußerst schwierig oder sogar unmöglich; mit dem Problem der Entfernungsbestimmung werden wir uns später noch mehrfach befassen. Hingegen ist die *Richtung*, aus der das Licht eines Himmelskörpers kommt, vergleichsweise wohldefiniert und kann ohne größere Schwierigkeiten gemessen werden.

In dieser Situation empfiehlt sich die Verwendung von Polarkoordinaten, wobei die Entfernung zum Objekt einfach offen gelassen wird. Wir denken uns die Sterne gewissermaßen auf eine sehr große Einheitskugel projiziert und beschreiben ihre Positionen an dieser „Himmelskugel“ durch zwei Winkelkoordinaten. Entsprechend den unterschiedlichen Bedürfnissen definiert man verschiedene Systeme nach folgendem Prinzip: Man wählt eine Grundebene, die die Himmelskugel in einem Großkreis, dem *Grundkreis*, schneidet. Auf diesem wird von einem willkürlich festgelegten Nullpunkt aus die eine Koordinate gemessen. Alle senkrecht auf dem Grundkreis stehenden Großkreise schneiden sich in den *Polen des Systems*. Auf demjenigen dieser Großkreise durch die Pole, der durch den betrachteten Stern geht, wird die zweite Koordinate gemessen, und zwar als Winkelabstand entweder vom Grundkreis oder vom Pol.

Winkel werden in der Astronomie im allgemeinen in Grad ($^{\circ}$) oder Untereinheiten davon ausgedrückt: $60'$ (Bogenminuten) sind ein Winkelgrad, $60''$ (Bogensekunden) sind eine Bogenminute. Bei der Angabe von Winkeldurchmessern sehr weit entfernter Objekte werden mitunter auch die Einheiten Milli- oder Mikrobogensekunden benötigt. Winkelangaben in Bogenmaß (Radian) sind unüblich; tauchen allerdings Winkelmaße direkt kombiniert mit irgendwelchen Längeneinheiten auf, so müssen die Winkel eigentlich immer in Radian ausgedrückt werden. Hier lauert eine häufige Fehlerquelle für Anfänger.

Das Konzept der Polarkoordinaten entspricht der Festlegung von geographischer Länge und Breite auf der Erdoberfläche. Komplikationen treten in der Astronomie auf, weil Grundkreise und Nullpunkte im Anschluss an irdische Bezugsgrößen definiert werden, die Erde aber komplizierte Bewegungen relativ zu den Sternen ausführt und sich damit die Koordinaten eines Sternes als Funktion der Zeit ändern.

Aus der sphärischen Trigonometrie (Dreiecke auf Kugeloberflächen) ergeben sich Umrechnungsformeln von Koordinaten des einen Systems in Koordinaten eines anderen, wenn die relativen Lagen von Grundkreisen und Nullpunkten bekannt sind. Insbesondere benötigt man dabei die bekannten Sinus- und Kosinussätze eines allgemeinen sphärischen Dreiecks. Man beachte, dass die Seitenlängen üblicherweise auch durch entsprechende Winkel ausgedrückt werden, unter denen man sie vom Mittelpunkt der Einheitskugel aus sieht. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 1.5 lauten diese Sätze:

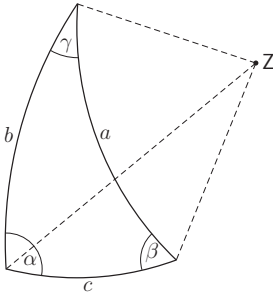


Abb. 1.5 Bezeichnungen in einem allgemeinen sphärischen Dreieck, gebildet aus Ausschnitten dreier Großkreise um den Kugelmittelpunkt Z.

$$\begin{aligned}\sin a \cdot \sin \gamma &= \sin c \cdot \sin \alpha \\ \cos a &= \cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha &= -\cos \gamma \cdot \cos \beta + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos a\end{aligned}\tag{1.29}$$

1.5.1

Das Horizontsystem

Grundkreis in diesem System ist der Horizont des Beobachtungsortes, der Schnitt der Horizontalebene mit der Himmelskugel. In der klassischen Astronomie wird dessen Südpunkt als Nullpunkt gewählt. In der Geodäsie wird statt des Südpunktes der Nordpunkt genommen, und diesem Verfahren haben sich aus technischen Gründen auch die Radioastronomen angeschlossen. Der durch den Südpunkt und die Pole (Zenit und Nadir) des Systems gehende Großkreis heißt *Meridian* des Beobachtungsortes.

Eine Koordinate, gemessen auf dem Horizont vom Südpunkt über Westen, Norden und Osten bezeichnet man als *Azimut* A . Die andere Koordinate ist die *Höhe* h über dem Horizont, oder wahlweise die *Zenitdistanz* z , wobei $z = 90^\circ - h$ (s. Abb. 1.6). Die Koordinaten im Horizont-System beschreiben also anschaulich und unmittelbar die Richtung, in der man ein Gestirn vom betreffenden Beobachtungsort aus findet. Ein positiver Wert von h bedeutet dabei, dass der Stern über dem Horizont steht. Letztlich gehen alle Koordinatenbestimmungen auf Messungen in diesem System zurück. Der Nachteil für astronomische Zwecke liegt darin, dass in ihm die Koordinaten eines Sternes sowohl vom Beobachtungsort als auch von der Beobachtungszeit abhängen. Ein anderer Ort ergibt nämlich eine andere Horizontalebene, und die jeweilige örtliche Horizontalebene bewegt sich fortlaufend mit der Erdrotation mit, verschiebt sich also laufend gegenüber den Sternen.

1.5.2

Äquatorialsysteme

Diese Nachteile des Horizontsystems werden nacheinander für beide Koordinaten in den Äquatorialsystemen beseitigt, deren Grundebene die Äquatorebene der Erde ist. Grundkreis dieser Systeme ist der Schnitt der Äquatorebene mit der Himmels-

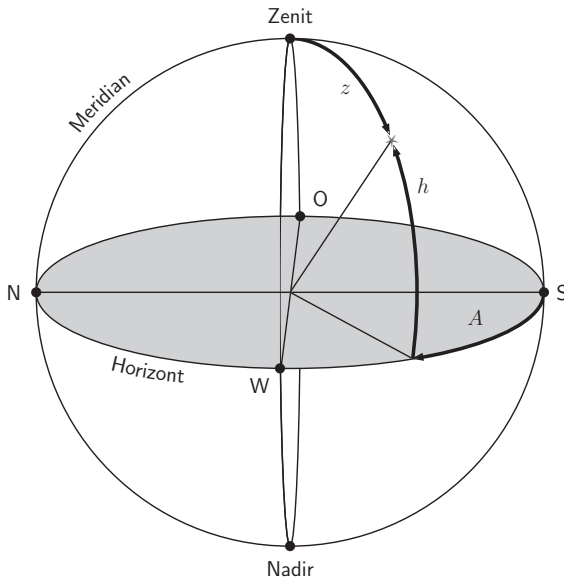


Abb. 1.6 Koordinaten im Horizontsystem: Höhe h , Zenitdistanz z , Azimut A ; die Himmelsrichtungen Norden N, Osten O, Westen W und Süden S sind auf dem Horizont eingezeichnet.

kugel, der *Himmelsäquator*, kurz Äquator genannt. Durch die zugehörigen Pole, nämlich den Nordpol und den Südpol des Himmels, geht die Verlängerung der Erdachse. Um diese auf der Äquatorebene senkrecht stehende Achse rotiert die Erde, und als Folge bewegen sich die Sterne scheinbar täglich einmal auf Parallelkreisen, also mit konstantem Winkelabstand zum Äquator. Dieser Winkelabstand, die *Deklination* δ , stellt die eine Koordinate dar. Sie wird längs eines Großkreises, der durch Stern und Himmelspol geht, vom Äquator aus gezählt, und zwar positiv in Richtung auf den Nordpol des Himmels.

Zur Festlegung der zweiten Koordinate gibt es zwei Möglichkeiten:

Das *feste Äquatorsystem* wird so genannt, weil sein Nullpunkt relativ zum Beobachtungsort fest ist. In ihm wird als Nullpunkt der Schnittpunkt des Meridians mit dem Himmelsäquator gewählt. Von hier aus, und zwar in Richtung W, N, O, wird als zweite Koordinate der *Stundenwinkel* t gemessen (s. Abb. 1.7). Dieser Stundenwinkel eines Sternes ist offenbar zeitlich variabel, und er hängt über den Meridian vom Ort des Beobachters ab. Pro Tag beschreibt er einen vollen Umlauf. Entsprechend zählt man übrigens den Stundenwinkel nicht im Bogenmaß, sondern im Zeitmaß (h, m, s). Es entspricht dabei

$$24^{\text{h}} = 360^{\circ} ; \quad 1^{\text{h}} = 15^{\circ} ; \quad 1^{\text{m}} = 15' ; \quad 1^{\text{s}} = 15'' .$$

Ein Stern mit dem Stundenwinkel $t = 0^{\text{h}}$ ist also genau im Süden und damit im Meridian. Auf seiner täglichen Umlaufbahn befindet er sich in seinem höchsten Punkt relativ zum Horizont. Diese Stellung heißt *obere Kulmination* und entspricht

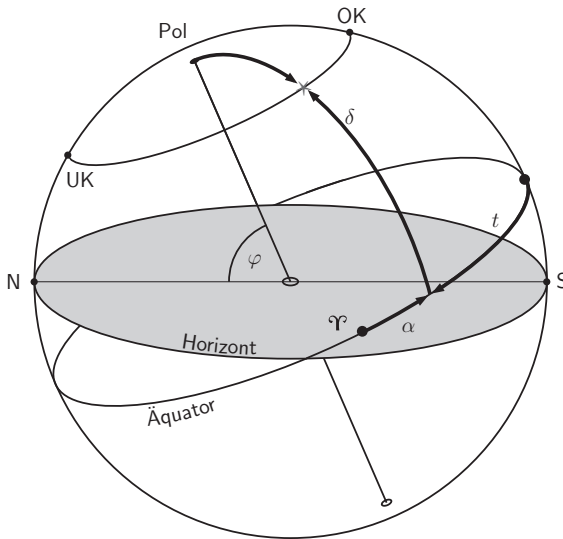


Abb. 1.7 Koordinaten in den Äquatorsystemen: Deklination δ , Stundenwinkel t , Rektaszension α ; Υ ist der Frühlingspunkt, OK und UK bezeichnen die obere beziehungsweise untere Kulmination.

dem Punkt OK in Abb. 1.7. Ein Stern mit $t = 12^{\text{h}}$ ist genau im Norden, in seinem tiefsten Punkt relativ zum Horizont. Dieser Punkt UK in Abb. 1.7 wird *untere Kulmination* genannt. Die Koordinaten δ und t geben also an, wo man einen Stern zu einem gegebenen Zeitpunkt relativ zum Äquator und zum Meridian des Beobachtungsortes finden kann. Diese zeitliche und örtliche Abhängigkeit macht den Stundenwinkel zum Katalogisieren der Sterne ebenso unbrauchbar wie vorher das Azimut.

Das *bewegliche Äquatorsystem* nimmt daher als Nullpunkt auf dem Himmelsäquator einen ausgezeichneten Punkt, der mit der täglichen Bewegung der Sterne mitläuft. Die von hier aus gemessene Koordinate eines Sternes ändert sich nicht mehr während der täglichen Rotation oder mit dem Beobachtungsort. Die an einem bestimmten Ort und zu einem bestimmten Zeitpunkt gemessenen Winkelabstände werden sozusagen am rotierenden Himmel eingefroren.

Dieser ausgezeichnete Punkt wurde im Anschluss an die scheinbare jährliche Bewegung der Sonne definiert, die dabei zweimal im Jahr den Himmelsäquator überschreitet (s. Abb. 1.8). Der Punkt, wo sie den Äquator von S nach N im Frühjahr überschreitet, wird *Frühlingspunkt* oder *Widderpunkt* (Zeichen: Υ) genannt. Vom Frühlingspunkt aus wird die zweite Koordinate dieses Systems, die *Rektaszension* α gezählt, und zwar entgegengesetzt zur täglichen Bewegung, also auch entgegengesetzt zum Stundenwinkel t . Die Koordinate α wird wie der Stundenwinkel in Stunden, Minuten und Sekunden gemessen. Zusammen mit der Deklination δ ist α in Sternkatalogen zur Beschreibung eines Sternortes angegeben.

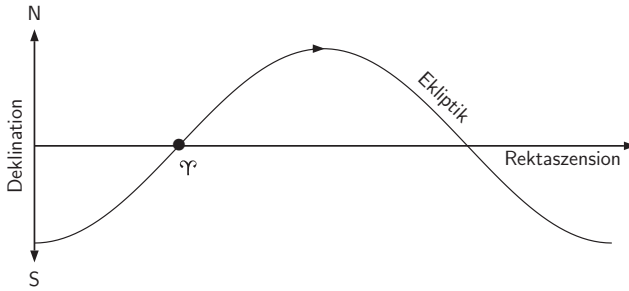


Abb. 1.8 Scheinbare jährliche Bahn (E) der Sonne relativ zum Äquator (A), aufgetragen in den äquatorialen Koordinaten α und δ .

Die Beziehung zwischen t und α ist sehr einfach (s. Abb. 1.7); offenbar unterscheiden sich beide außer in der Zählrichtung nur durch den jeweiligen, als *Sternzeit* Θ (in h, m, s) bezeichneten Stundenwinkel des Frühlingspunktes, d. h.

$$t = \Theta - \alpha . \quad (1.30)$$

Auf allen Sternwarten gibt es Sternzeituhren, die die Sternzeit Θ anzeigen, womit die momentane Lage des Frühlingspunktes relativ zum örtlichen Meridian gegeben ist. Aus Katalogen entnimmt man α für einen zu beobachtenden Stern und errechnet damit sofort den Stundenwinkel, unter dem der Stern zu diesem Zeitpunkt zu finden ist.

1.5.3

Das Ekliptikalsystem

Dieses System ist besonders geeignet zur Beschreibung von Bewegungen im Planetensystem. Grundkreis ist die *Ekliptik*, d. h. die scheinbare jährliche Bahn der Sonne am Himmel (bezüglich des Sternenhintergrunds). Sie ist der Schnitt der Bahnebene der Erde, der so genannten Ekliptikebene, mit der Himmelskugel. Nullpunkt ist auch hier der Frühlingspunkt Υ . Von ihm aus längs der Ekliptik wird die *ekliptikale Länge* λ als eine Koordinate, auf Großkreisen senkrecht zur Ekliptik die *ekliptikale Breite* β als zweite Koordinate gezählt.

Die Ekliptikebene ist gegen die Äquatorebene um den Winkel

$$\varepsilon = 23.5^\circ ,$$

die so genannte *Schiefe der Ekliptik*, geneigt. Dies entspricht der Neigung $90^\circ - \varepsilon$ der Erdachse gegen die Erdbahnebene.

1.5.4

Das Galaktische System

Dieses System ist zur Beschreibung von Positionen relativ zur Milchstraße (Galaxis) eingeführt worden. Grundkreis ist der galaktische Äquator, d. h. der Schnitt der

Tabelle 1.1 Zusammenstellung verschiedener Koordinatensysteme.

System	Grundkreis	Nullpunkt gegeben durch	Koordinaten
Horizontal	Horizont	Meridian	Azimut A , Höhe h
Äquatorial, fest	Äquator	Meridian	Stundenwinkel t , Deklination δ
Äquatorial, beweglich	Äquator	Frühlingspunkt	Rektaszension α , Deklination δ
Ekliptikal	Ekliptik	Frühlingspunkt	eklipt. Länge λ , eklipt. Breite β
Galaktisch	galakt. Äquator	Richtung zum galakt. Zentrum	galakt. Länge l , galakt. Breite b

Milchstraßenebene mit der Himmelskugel; er wird anschaulich durch das leuchtende Band der Milchstraße am Himmel markiert. Der Nullpunkt darauf wird durch die Richtung von uns zum Zentrum des Milchstraßensystems festgelegt. Es liegt im Sternbild Sagittarius.

Längs des galaktischen Äquators zählt man die *galaktische Länge* l und senkrecht dazu die *galaktische Breite* b als die beiden galaktischen Koordinaten. Der Nordpol dieses Systems wurde im beweglichen Äquatorsystem (bezogen auf den Beginn des Jahres 1950) auf „glatte“ Werte festgelegt zu:

$$\text{Pol } (b = +90^\circ) : \alpha = 12^{\text{h}}49^{\text{m}}, \quad \delta = +27^\circ24'.$$

Dadurch ergibt sich als Nullpunkt der galaktischen Länge

$$l = 0^\circ, \quad b = 0^\circ : \alpha = 17^{\text{h}}42^{\text{m}}26.603^{\text{s}}, \quad \delta = -28^\circ55'0.45''.$$

In Tabelle 1.1 sind die Bezeichnungen in den verschiedenen Systemen zusammengefasst.

1.5.5

Präzession und Nutation

Ekliptik- und Äquatorebene sowie einer ihrer Schnittpunkte an der Himmelskugel – der Frühlingspunkt – sind wichtige Bezugsgrößen astronomischer Koordinatensysteme. Beide Ebenen verlagern sich leider langsam mit der Zeit, wobei auch der Frühlingspunkt langsam wandert. Die Änderung ist kompliziert, und nur die wichtigsten Effekte sollen hier erwähnt werden. Sie lassen sich verstehen, wenn man z. B. die Erde als einen Kreisel auffasst, auf den Kräfte wirken, die die Kreiselachse zu kippen versuchen. Dadurch wird ein Drehmoment ausgeübt, dessen Vektor senkrecht auf der Ebene steht, in der Kippkräfte und Drehpunkt liegen. Statt nun einfach umzukippen, weicht solch ein Kreisel dann so aus, dass er seine Rotationsachse in Richtung des Drehmoments verlagert. Diese Bewegung der Rotationsachse nennt man *Präzession*.

Die rotierende Erde kann als ein Kreisel betrachtet werden, der durch die Zentrifugalkräfte abgeplattet ist. Den resultierenden Erdkörper denke man sich zusammengesetzt aus einer Kugel plus einer Verdickung am Äquator, dem so genannten *Äquatorwulst* (s. Abb. 1.9).

Die Anziehungskräfte von Sonne und Mond, dessen Bahnebene man sich hier vereinfachend in die Ekliptikebene gelegt denkt, versuchen den Äquatorwulst und damit die Äquatorebene in die Ekliptik zu kippen. (Die Anziehung auf den kugelsymmetrisch gedachten Restkörper der Erde ergibt kein resultierendes Drehmoment.) Als Folge führt die Erdachse eine Präzession aus und läuft dabei langsam auf einem Präzessionskegel um den Pol der Ekliptik. Dabei bleibt die Neigung der Erdachse gegen die Erdbahn in etwa konstant. Der Öffnungswinkel des Präzessionskegels ist damit gleich der „Schiefe der Ekliptik“, er beträgt $\varepsilon = 23.5^\circ$. Die Umlaufperiode ist etwa 25 700 Jahre (s. Abb. 1.9). Mit dieser Periode läuft folglich auch der Himmelspol auf einem Kreis um den Pol der Ekliptik, nämlich auf dem Schnitt des Präzessionskegels mit der Himmelskugel. Dadurch kommt z. B. der Nordpol des Himmels in ca. 13 000 Jahren nahe an den Stern Wega, der dann „Polarstern“ wird.

Mit der gleichen Periode verlagert sich natürlich auch die Äquatorebene relativ zur Ekliptikebene, und damit der Frühlingspunkt. Er wandert entgegen der scheinbaren jährlichen Bewegung der Sonne längs der Ekliptik. Diese Verschiebung heißt *Lunisolar-Präzession* p_0 ; sie kann aus $p_0 \approx 360^\circ/25\,700a$ abgeschätzt werden und beträgt $p_0 = 50.4''/a$ (Bogensekunden pro Jahr). Die wechselnde Stellung von Sonne und Mond bewirkt, dass dieser Mittelwert der Lunisolar-Präzession von zeitlichen Schwankungen überlagert ist. Die Lunisolar-Präzession wurde bereits 130 v. Chr. von Hipparch entdeckt.

Die obige Vereinfachung, die Mondbahnebene in die Ekliptikebene zu legen, muss allerdings korrigiert werden. Tatsächlich beträgt die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik ca. 5° . Jetzt wird auch der um die Erde umlaufende Mond als Kreisel aufgefasst, dessen Achse in eine Präzession versetzt wird, und zwar durch

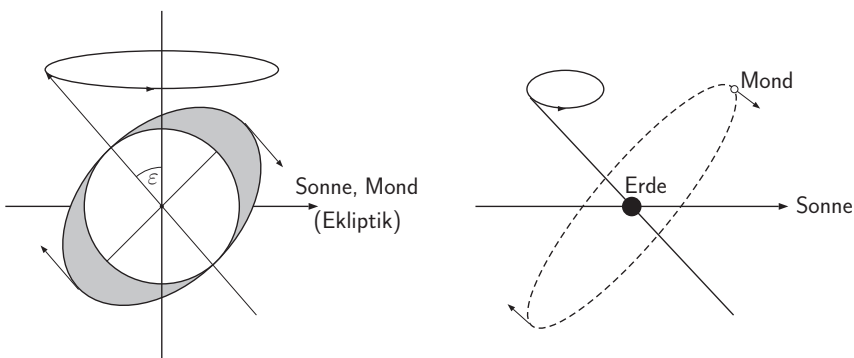


Abb. 1.9 Links: Die Lunisolar-Präzession resultiert aus einer Kreisbewegung der Erde aufgrund ihres Äquatorwulstes. Rechts: Die Nutation ergibt sich durch die Auswirkung des Mondes.

ein Drehmoment, das durch die Anziehung der Sonne auf den Mond zustande kommt (s. Abb. 1.9 rechts).

Damit dreht sich die Schnittlinie der Mondbahn- mit der Erdbahnebene, die so genannte *Knotenlinie*. Diese „Drehung der Mondknoten“ erfolgt mit 18.6 a Periode. Hierdurch variiert die Lage der Mondbahn zur Äquatorebene und damit das vom Mond auf den Äquatorwulst der Erde ausgeübte Drehmoment. Das Resultat ist, dass der Lunisolar-Präzession eine kleine zusätzliche Schwankung mit einer Periode von 18.6 a aufgeprägt wird. Physikalisch ist dies eine erzwungene Schwingung, wird aber traditionell die *astronomische Nutation* genannt.

Zusammengesetzt läuft damit die Erdachse in 18.6 a Periode um einen kleinen Kegel mit einem Öffnungswinkel von etwa $8''$, während die Mittellinie dieses kleinen Kegels in 25 700 a auf dem großen Präzessionskegel der Lunisolar-Präzession mit dem Öffnungswinkel von 23.5° umläuft.

Auch die in der Ekliptik-Ebene um die Sonne umlaufende Erde kann als Kreisel aufgefasst werden. Hierauf üben die großen Planeten, die in etwas anderen Ebenen umlaufen, ein Drehmoment aus, was eine langsame Präzession der Ekliptik zur Folge hat. Durch diese Planetenpräzession wandert der Frühlingspunkt um $p_p = 0.125''/a$ längs des Äquators.

Gleichzeitig ändert sich dadurch mit etwa 40 000 a Periode die Schiefe der Ekliptik zwischen 21.9° und 24.3° ; gegenwärtig nimmt sie um $0.47''/a$ ab.

1.5.6

Koordinaten-Änderung durch Präzession

Lunisolar- und Planetenpräzession verschieben laufend den Äquator und die Ekliptik, also auch den Frühlingspunkt relativ zu den Sternen. Es ändern sich demnach für das bewegliche Äquatorsystem sowohl Grundkreis als auch Nullpunkt, und damit die Koordinaten α , δ eines Sternes.

Im Laufe eines Jahres verschiebt sich der Frühlingspunkt um $m = 3.07234^s$ in α und um $n = 20.0468''$ in δ . Die jährliche Änderung der Koordinaten α , δ eines Sternes durch Präzession errechnet sich dann in guter Näherung für $\delta < 85^\circ$ nach

$$p_\alpha = m + n \cdot \tan \delta \cdot \sin \alpha, \quad p_\delta = n \cdot \cos \alpha. \quad (1.31)$$

Bei Angabe von Koordinaten α , δ muss man also stets mit angeben, auf welchen Frühlingspunkt sie sich beziehen. Typische Koordinatenangaben in Katalogen beziehen sich auf die Lage des Frühlingspunktes zu Beginn des Jahres 1950 oder 2000, kurz gesagt auf die so genannten *Äquinoktien* 1950 oder 2000. Ändert sich für ein festgehaltenes Äquinoktium weiterhin die Position eines Sternes, so besitzt er eine *Eigenbewegung*. Den Zeitpunkt der Messung der Position für ein vorgegebenes Äquinoktium nennt man die *Epoche*. Streng genommen muss man also für jeden Ort sowohl Äquinoktium als auch Epoche angeben. Da die Eigenbewegung der meisten Sterne allerdings vernachlässigbar klein ist, spielt die Epoche nur bei Spezialuntersuchungen eine Rolle. Die größte bekannte Eigenbewegung eines Sternes beträgt etwa $10'' a^{-1}$.

Genau genommen hängen die Zahlenwerte der in der Positionsastronomie benutzten Parameter, z. B. der der Lunisolar-Präzession, nicht nur von den astronomischen Gegebenheiten ab, sondern auch vom System der fundamentalen physikalischen Konstanten, z. B. der Lichtgeschwindigkeit. Hier taucht bereits das Problem eines fundamentalen physikalischen Inertialsystems auf. Nach einer 1986 erfolgten „neuen“ Definition der physikalischen Konstanten wurden daher auch die astronomischen Konstanten von der Internationalen Astronomischen Union (IAU) unter Beachtung aller bis dahin verfügbaren Beobachtungen neu festgelegt. Da gleichzeitig ja auch die aktuelle Epoche sich vom normalerweise benutzten Äquinoktium 1950 entfernt hatte, wurde empfohlen, beim Gebrauch des Äquinoktiums 2000 auch die „neuen“ Konstanten zu berücksichtigen. Man kennzeichnet das alte System üblicherweise mit B1950 und das neue mit J2000.

1.6

Astronomie und Zeit

Die Definition von Zeiteinheiten schließt sich an Messmethoden für die Zeit an, und diese basieren auf irgendwelchen periodisch ablaufenden Vorgängen.

Bis vor wenigen Jahren waren die astronomischen Zeitmessungen die genauesten. Anschaulich gesprochen wird hierbei die Himmelskugel samt Koordinatensystem als Zifferblatt einer Uhr, irgendein periodisch umlaufender Punkt (z. B. ein Himmelskörper) als Zeiger benutzt. Die entsprechenden Zeitdefinitionen sind in den folgenden Abschnitten aufgeführt.

Neuerdings sind noch genauere Zeitmessungen im Labor möglich, wo z. B. periodisch ablaufende Vorgänge in Atomen verfolgt werden (s. Abschn. 1.6.6). Diese Vorgänge sind so streng periodisch, dass heute damit sogar die „astronomischen Uhren“ kontrolliert werden können.

1.6.1

Die Sternzeit

Die Sternzeit wurde bereits in Abschn. 1.5.2 definiert; sie wird gemessen als *Stundenwinkel Θ des Frühlingspunktes*. Dieser ist also hierbei der Zeiger, der in 24^{h} Sternzeit einmal auf dem Äquatorial-Koordinatensystem als Zifferblatt umläuft. Ein *Sterntag* ($= 24^{\text{h}}$ Sternzeit $= 86\,400^{\text{s}}$ Sternzeit) beginnt mit einem Meridiandurchgang des Frühlingspunktes ($\Theta = 0^{\text{h}}$) und endet mit seinem nächsten Meridiandurchgang. Da $\Theta = 0^{\text{h}}$ zu verschiedenen Tages- oder Nachtzeiten eintritt, ist die Sternzeit außer für astronomische Zwecke nicht brauchbar.

1.6.2

Die wahre Sonnenzeit

Es ist naheliegend, die Zeitdefinition mit dem Lauf der Sonne zu koppeln, deren Stand ja das tägliche Leben bestimmt. Als wahre Sonnenzeit definiert man den

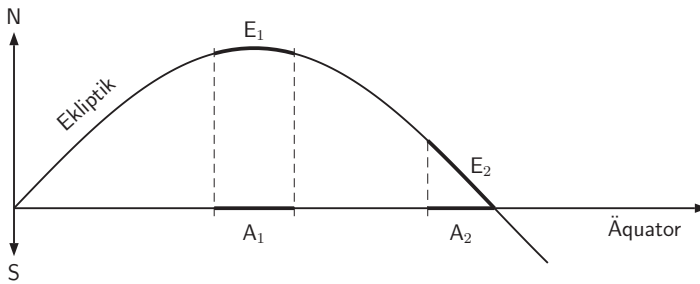


Abb. 1.10 Zur „wahren Sonnenzeit“: Gezeigt wird ein Ausschnitt der scheinbaren Sonnenbahn (s. Abb. 1.8). Gleich lange Abschnitten auf der Ekliptik ($E_{1,2}$) ergeben unterschiedlich lange projizierte Abschnitte auf dem Äquator ($A_{1,2}$).

Stundenwinkel des Mittelpunktes der Sonnenscheibe. Damit der Tagesanfang um Mitternacht liegt, addiert man 12 Stunden hinzu.

Leider ist der Lauf der Sonne am Himmel nicht gleichförmig. Der mittleren Geschwindigkeit überlagern sich zwei Schwankungen. Wegen der Elliptizität der Erdbahn läuft die Sonne in der Ekliptik im Winter schneller als im Sommer (siehe 2. Keplersches Gesetz in Abschn. 1.2.1). Daher hat ja auch auf der Nordhalbkugel der Erde der Sommer 186 und der Winter nur 179 Tage. Dies ergibt offensichtlich eine ganzjährige Periode. Gleich lange Bahnstücke ($E_1 = E_2$) auf der Ekliptik ergeben unterschiedlich lange Projektionen ($A_1 > A_2$) auf dem Äquator (s. Abb. 1.10). Und da die tägliche Rotation um eine auf der Äquatorebene senkrecht stehende Achse erfolgt, laufen gleich lange Bogenstücke auf dem Äquator, oder auf einem Parallelkreis hierzu, in gleichen Zeitintervallen durch den Meridian, nicht aber gleiche Bogenstücke auf der Ekliptik. Dies ergibt offensichtlich eine halbjährige Periode. Diese Schwankungen machen auch die wahre Sonnenzeit für den praktischen Gebrauch ungeeignet. Man hat daher die mittlere Sonnenzeit eingeführt.

1.6.3

Die mittlere Sonnenzeit

Die „mittlere Sonne“ ist definiert als ein gedachter Punkt, der mit der gleichen Periode (1 Jahr) wie die Sonne umläuft, sich dabei aber mit konstanter Winkelgeschwindigkeit längs des Äquators bewegt.

Ein mittlerer Sonnentag ist dann die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinander folgenden unteren Kulminationen dieser mittleren Sonne, was 24^{h} oder $86\,400^{\text{s}}$ mittlerer Sonnenzeit entspricht. Die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit wird *Zeitgleichung* genannt,

$$\text{Zeitgleichung} = \text{Wahre Zeit} - \text{Mittlere Zeit} .$$

Skizziert man sie über das ganze Jahr, so ergibt sich ein Verlauf wie in Abb. 1.11 dargestellt.

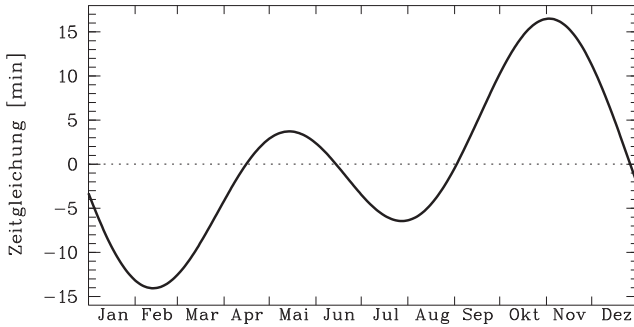


Abb. 1.11 Verlauf der Zeitgleichung über das Jahr.

Die Skizze spiegelt die Überlagerung der beiden periodischen Schwankungen der wahren Sonnenzeit wider. Man sieht, dass die Zeitgleichung vier Extremwerte hat, nämlich:

Mitte Februar:	-14.4^m	Mitte Mai:	$+3.8^m$
Ende Juli:	-6.4^m	Anfang November:	$+16.4^m$

Der Nullpunkt der Zeitgleichung ist durch folgende etwas komplizierte Festlegung des Startpunktes für den Lauf der mittleren Sonne definiert: Ein gleichzeitig mit der *wahren* Sonne im Perihel startender, aber mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Ekliptik umlaufender Punkt soll gleichzeitig mit der *mittleren* Sonne im Frühlingspunkt sein. Daher ist die – ungleichförmig laufende – wahre Sonne früher im Frühlingspunkt als die mittlere, und die Zeitgleichung bei Frühlingsanfang ist nicht „Null“, sondern etwa sieben Minuten.

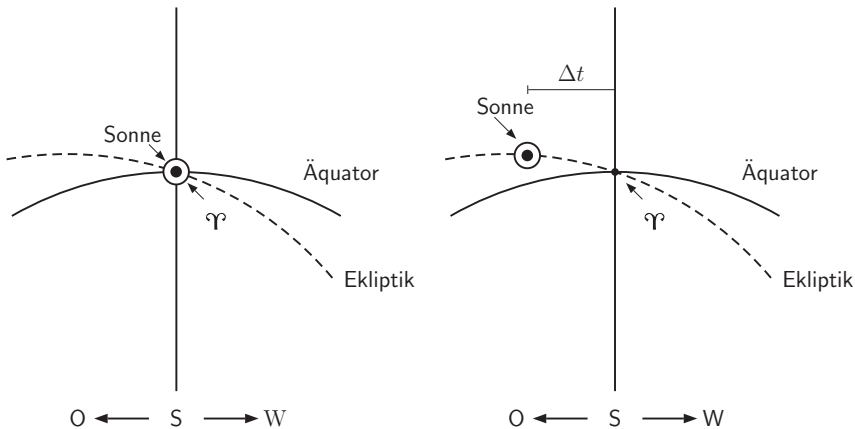


Abb. 1.12 Blick auf den Meridian zur Veranschaulichung der Differenz von Sonnen- und Sterntag. Links: Sonne und Frühlingspunkt sind gleichzeitig im Meridian; rechts: Situation 24^h Sternzeit später.

Das Verhältnis von Sonnentag zu Sterntag ersieht man aus Abb. 1.12, in denen ein Blick auf den Meridian von irgendeinem Beobachtungsort aus dargestellt ist. Links ist ein Zeitpunkt dargestellt, wo Sonne und Frühlingspunkt genau gleichzeitig durch den Meridian gehen, rechts die Situation 24^h Sternzeit später. Der Frühlingspunkt ist dann per definitionem wieder im Meridian, die Sonne aber auf ihrem jährlichen Umlauf von W nach O etwas gewandert: Dies spiegelt die Tatsache wider, dass sich die Erde während einer Umdrehung um ihre Achse gleichzeitig auf ihrer Bahn um die Sonne etwas weiterbewegt hat. Die Erde muss sich also um etwas mehr als 360° drehen, um die Sonne wieder in den Meridian zu rücken. Diese Zusatzdrehung beträgt etwa 1° entsprechend einer Zeitdifferenz $\Delta t \approx 4^m$. Folglich ist ein Sterntag kürzer als ein Sonnentag. Im Laufe eines Jahres ist die Sonne wieder im Frühlingspunkt angekommen und der Effekt summiert sich zu einer vollen zusätzlichen Umdrehung des Frühlingspunktes auf. Damit entsprechen 365 Sonnentage gerade 366 Sterntagen. Bei Benutzung der genauen Jahreslänge ergibt sich:

$$24^h \text{ mittl. Sonnenzeit} = 24^h 03^m 56.555^s \text{ Sternzeit,}$$

$$24^h \text{ Sternzeit} = 23^h 56^m 04.091^s \text{ mittl. Sonnenzeit.}$$

1.6.4

Ortszeit – Zonenzeit – Weltzeit

Die bisher gegebenen Zeitdefinitionen benutzen den Meridiandurchgang irgend-eines Objektes für den Tagesanfang. Das passiert gleichzeitig natürlich nur in Orten, die auf der gleichen geographischen Länge, d. h. dem gleichen Erdmeridian, liegen. Sie sind sonst örtlich verschieden, also *Ortszeiten*. Würde man sie im täglichen Leben benutzen, so müsste man die Uhr bereits umstellen, wenn man z. B. in Hamburg von Bergedorf nach St. Pauli führe.

Daher hat man auf der Erde ganze Streifen, auch Zeitzonen genannt, abgegrenzt, in denen jeweils eine einheitliche Zeit, die *Zonenzeit*, gilt. Beispiele dafür sind: unsere MEZ (Mittleuropäische Zeit) – das ist die Ortszeit der geographischen Länge 15° Ost; die WEZ – die Ortszeit von 0° –, die OEZ – die Ortszeit von 30° Ost.

Astronomische Ereignisse werden meist in *Weltzeit*, abgekürzt UT = Universal Time, angegeben. Das ist die mittlere Sonnen-Ortszeit des Nullmeridians der Erde, der durch einen Punkt in Greenwich definiert ist.

1.6.5

Das Jahr

Wie die Tagesdefinitionen letztlich auf der Rotation der Erde beruhen, so basiert das Jahr als größere Zeiteinheit auf dem Bahnmlauf der Erde um die Sonne bzw. den dadurch hervorgerufenen scheinbaren Bewegungen. Auch hier gibt es verschiedene Definitionen:

Das *tropische Jahr* ist definiert als Periode, in der die Sonne einmal von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt läuft. Es entspricht 365.24219^d mittlerer Sonnenzeit. Nach jeweils diesem Zeitraum wiederholt sich eine bestimmte Stellung der Sonne relativ zum Äquator, nämlich ihr Durchgang durch den Äquator von Süd nach Nord. Dieses tropische Jahr gibt also die Periode, mit der sich unsere Jahreszeiten wiederholen, die ja auf den verschiedenen Stellungen der Sonne relativ zum Äquator beruhen. Dem sollte möglichst der Kalender angepasst werden.

Das *Kalenderjahr* sollte jeweils eine volle Zahl von Sonnentagen haben, andererseits im Mittel über lange Zeiträume möglichst gleich dem tropischen Jahr sein. Dem entsprechend macht man es durch Einfügung von Schalttagen unterschiedlich lang. Heute wird der Gregorianische Kalender benutzt, für den die Schalttage nach folgender von Papst Gregor XIII im Jahre 1582 eingeführten Regel bestimmt werden:

Normales Jahr mit 365^d	Beitrag zum Mittelwert: 365^d
Alle vier Jahre ein zusätzlicher Schalttag	$+1/4^d$
Ausfall des Schalttages bei allen Jahren, die glatt durch 100, nicht aber durch 400 teilbar sind (z. B. 1700, 1800, 1900, 2100)	$-3/400^d$
mittlere Jahreslänge	365.24250^d

Dies ist gegenüber dem tropischen Jahr nur um $0.00031^d \sim 27^s$ zu lang. Erst in 3200 Jahren ergibt sich ein Tag Differenz gegen das tropische Jahr. Das Gregorianische Kalenderjahr folgt den Jahreszeiten also über sehr lange Zeiträume hin mit guter Genauigkeit.

Bis zur Gregorianischen Reform galt das unter C. Julius Cäsar 46 v. Chr. eingeführte Julianische Jahr. Es hatte alle vier Jahre einen Schalttag, also eine mittlere Dauer von 365.25^d . Damit beträgt der Fehler zum tropischen Jahr 11 min, was sich bis zum 16. Jhd. bereits auf zehn Tage Differenz aufsummiert hatte.

Besondere Komplikationen ergaben sich immer dann, wenn auch noch die Periodizität des Mondumlaufes in das Kalenderjahr einbezogen werden sollte, wie es in früheren Kulturen häufig der Fall war. Ein Erbe hieraus ist uns in der komplizierten Festlegung des Osterfestes geblieben, das auf den 1. Sonntag nach dem 1. Frühlingsvollmond fallen soll. Die genaue Berechnung ist wegen des unregelmäßigen Mondlaufes sehr kompliziert; leidliche Näherungsdaten ergibt die vereinfachende Gaußsche Osterregel²⁾. Extreme Daten für das Fest sind der 22. März und der 25. April.

- 2) In einer vereinfachten Fassung bezeichne T die Jahreszahl, und zwei numerische Konstanten M und N , die eigentlich eine Funktion des Jahrhunderts sind, seien für den Zeitraum 1900 bis 2099 zu $M = 24$ und $N = 5$ gesetzt. Man errechne als Zwischengrößen:
 $a = T \bmod 19$, $b = T \bmod 4$, $c = T \bmod 7$,
 $d = (19 \cdot a + M) \bmod 30$ und $e = (2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + N) \bmod 7$. Dann fällt

Ostern auf den $(22 + d + e)$ ten März, oder wenn der Wert > 31 ist, auf den $(d + e - 9)$ ten April. Dies hat 2 Ausnahmen: wenn $d = 29$ und $e = 6$ ist Ostern am 19.4., und wenn $a = 10$, $d = 28$ und $e = 6$ ist Ostern am 18.4. (aufgrund der kirchlichen Zusatzannahme, dass das Äquinoktium immer auf den 21. März fällt).

Das *siderische Jahr* ist definiert durch einen Umlauf der Sonne relativ zu den Fixsternen. Da der Frühlingspunkt relativ zu den Fixsternen wandert, ist das siderische Jahr um ca. 20^m länger als das tropische:

$$1 \text{ siderisches Jahr} = 365.25636^{\text{d}} \text{ mittl. Sonnenzeit.}$$

Das *anomalistische Jahr* ist die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Periheldurchgängen der Erde. Das Perihel der Erdbahn ist ihr sonnennächster Punkt. Die Dauer des anomalistischen Jahres beträgt 365.25964^d. Dieser Wert ist allerdings nicht konstant, er ändert sich aufgrund zeitlicher Änderung der Erdumlaufellipse.

1.6.6

Präzisionszeitmessungen

Im Prinzip verläuft die astronomische Messung der Zeit über eine exakte Feststellung der Sternzeit Θ . Mit Spezialinstrumenten (z. B. Meridiankreisen) wird der Zeitpunkt des Meridiandurchgangs von Sternen gemessen, deren Rektaszension α extrem genau bekannt ist. Da im Meridian der Stundenwinkel des Sternes gleich Null ist, folgt aus Gl. (1.30), dass in diesem Moment $\Theta = \alpha$.

Präzisionsmessungen im Labor benutzen die Konstanz von Schwingungsvorgängen, wobei die erreichbare Genauigkeit mit der Frequenz der Schwingungen steigt. Bei der Quarzuhr ist der zur Zeitmessung benutzte periodische Vorgang die Eigenschwingung (Frequenz etwa 10^4 s^{-1}) von Quarzkristallen, mit denen man einen elektrischen Schwingkreis steuert. Als extrem streng periodischen Vorgang benutzt man die Eigenschwingung von Atomen bzw. Molekülen, um damit eine Atomuhr bzw. Moleküluhr zu steuern. Diese Methode ist so genau, dass sie zur Eichung und Kontrolle von Quarzuhren benutzt wird und auch eine Kontrolle der astronomischen Zeitmessung, also letztlich der Konstanz der Erdrotation, erlaubt.

Mit den eben genannten exakten Messmöglichkeiten konnte gezeigt werden, dass die astronomisch im Anschluss an die Erdrotation gemessene Zeit sich *ändert*. Zunächst gibt es innerhalb eines Jahres mehrere periodische (mit unterschiedlichen Perioden und Amplituden) und unregelmäßige Schwankungen der Tageslänge. Trotz der langfristigen Zunahme von rund $6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ pro Tag aufgrund der Gezeitenreibung (s. Abschn. 4.3.1) nimmt zur Zeit die Tageslänge mit etwa $2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ pro Tag ab. Die Ursachen, bisher noch nicht für alle Änderungen bekannt, liegen z. B. in meteorologisch oder durch Massenverschiebung im Erdinnern bedingten Änderungen des Trägheitsmomentes der Erde (wobei sich die Winkelgeschwindigkeit wegen der Konstanz des Drehimpulses ändern muss).

Da sich neben der Tageslänge auch die Jahreslänge als langsam veränderlich erwies, hat man für genaue astronomische Untersuchungen die so genannte *Ephemeridenzeit* (EZ) definiert, die mit einer willkürlich festgesetzten Sekundenlänge als Zeiteinheit operiert. Man definiert 1 s als den

$$31556925.9747^{\text{ten}} \text{ Teil des tropischen Jahres zu Beginn des Jahres 1900.}$$

1.7

Sternörter

1.7.1

Sternbilder und Bezeichnungen von Sternen

Schon von alters her wurden besonders auffallende Sterne zu Sterngruppen, den Sternbildern, vereinigt, z. B. Großer Bär, Orion, Leier usw. In der heutigen Astronomie bezeichnet ein Sternbild ein *Gebiet* der Himmelskugel, dessen Begrenzung durch Vereinbarung festgelegt wurde. Zum Äquinoktium 1875 verliefen diese Begrenzungen jeweils genau parallel zu Rekaszenions- und Deklinationskoordinaten. Die 88 Sternbilder überdecken die Himmelskugel vollständig.

Die Bezeichnung der Sterne innerhalb der Sternbilder ist historisch gewachsen. Die *hellsten* Sterne werden mit einem griechischen Buchstaben und einer aus drei Buchstaben bestehenden Abkürzung des Genitivs des lateinischen Sternbildnamens bezeichnet. Zum Beispiel heißt der hellste Stern im Sternbild Großer Bär (lateinisch: *Ursa Maior*) α *Ursae Maioris* oder kurz α *UMa*. Der zweithellste Stern im Sternbild Taurus heißt β *Tauri* oder kurz β *Tau* usw. Einige sehr helle Sterne haben daneben auch „Eigennamen“, z. B. heißt α *CMa* (*Canis Maioris*) auch *Sirius*. Etwas *schwächere* Sterne werden innerhalb eines Sternbildes mit einer Nummer statt mit einem griechischen Buchstaben bezeichnet, z. B. 10 *Ori* (10 *Orionis*), 68 *Cyg* (68 *Cygni*). *Schwache* Sterne werden nur mit ihrer Nummer in einem Sternkatalog oder mit ihren Koordinaten bezeichnet; z. B. bedeutet HD 48916 den Stern mit der laufenden Nummer 48916 im Henry-Draper-Katalog. *Veränderliche* Sterne haben oft vor der Sternbildabkürzung große lateinische Buchstaben, z. B. *T Tau* (*T Tauri*), *FG Sge* (*FG Sagittae*) oder eine laufende Nummer mit vorgestelltem „V“.

Die Sternbildnamen des Nordhimmels stammen vorwiegend aus der griechischen Mythologie, die des Südhimmels vielfach aus der Seefahrt, da sie bei den ersten großen Entdeckungsreisen auf der Südhalbkugel der Erde gegeben wurden. Die scheinbare jährliche Sonnenbahn – die Ekliptik – läuft durch die zwölf Sternbilder des so genannten Tierkreises, da viele dieser Sternbilder Tiernamen tragen (Widder, Stier, Krebs, ...). Sie haben von allen astronomischen Begriffen die größte Popularität in der Tagespresse, da sie in der Astrologie eine Rolle spielen. Man beachte aber, dass astrologische Tierkreiszeichen und astronomische Sternbilder heute wegen der Präzession nicht mehr miteinander übereinstimmen. In der Astrologie werden nämlich die Tierkreiszeichen vom momentanen Frühlingspunkt aus in der Abfolge gezählt, die die Sternbilder im Altertum vom damaligen Frühlingspunkt aus beginnend hatten. Seit dieser Festlegung im alten Babylonien ist der Frühlingspunkt jedoch um fast zwei Sternbilder längs der Ekliptik weiter gewandert.

1.7.2

Die Messung von Sternörtern

Die Vermessung der Positionen von Himmelskörpern wird auch „Astrometrie“ genannt. Das Prinzip solcher Messungen soll hier nur angedeutet werden. Wir

denken uns dazu, dass ein genau in den Meridian gerichtetes Fernrohr („Meridiankreis“) vorhanden ist, mit dem Meridiandurchgänge von Sternen beobachtet und ihre Höhen während des Meridiandurchganges gemessen werden können, sowie eine genau gehende Sternzeituhr.

Zunächst erfolgt die Messung der *Polhöhe* φ . Bei ihrer scheinbaren Bewegung laufen die Sterne auf Parallelkreisen zum Äquator um, die sich – entsprechend ihrer Deklination δ – ganz, teilweise oder gar nicht über dem Horizont befinden (s. Abb. 1.13). *Zirkumpolarsterne* nennt man solche Sterne, deren Parallelkreis vollständig über dem Horizont liegt, die bei der unteren Kulmination im Norden also eine Höhe von $h_0 \geq 0^\circ$ haben. Die Bedingung dafür ist offensichtlich

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi . \quad (1.32)$$

Man kann nun für einen solchen Zirkumpolarstern die obere und untere Kulminationshöhe, h_1 und h_0 , messen. (Der Einfachheit halber seien hier beide von N aus gerechnet.) Da sie symmetrisch zum Pol liegen, ist die Polhöhe

$$\varphi = (h_1 + h_0)/2 . \quad (1.33)$$

Auf einer exakt kugelförmigen Erde ist die Polhöhe offensichtlich identisch mit der geographischen Breite. Die Messung von δ für irgendeinen Stern erfordert dann einfach eine Messung seiner oberen Kulminationshöhe h_1 im Meridian (s. Abb. 1.13), woraus sich

$$\delta = h_1 - (90^\circ - \varphi) \quad (1.34)$$

ergibt. Die Messung von α besteht aus einer Ablesung der Sternzeit im Moment des Meridiandurchganges. Dann ist der Stundenwinkel $t = 0$ nach Gl. (1.30) $\alpha = \Theta$.

Das eben beschriebene Verfahren nennt man absolute Ortsmessung. Sie ist nur für einige so genannte Fundamentalsterne sehr genau durchführbar. Alle übrigen

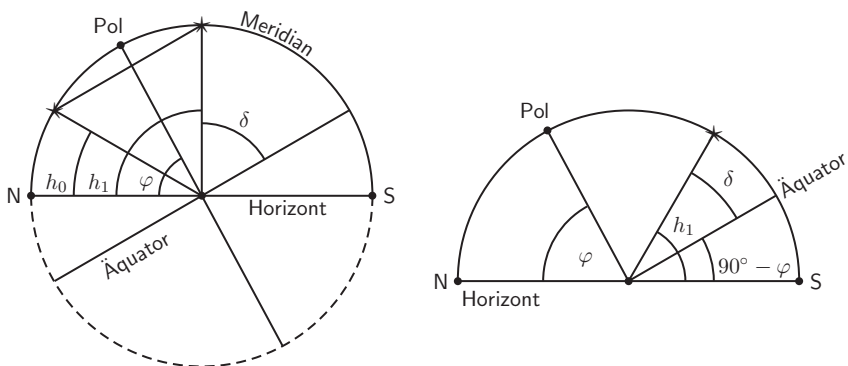


Abb. 1.13 Links: Schnitt der Himmelskugel mit der Meridianebene und Projektion des Parallelkreises eines Zirkumpolarsternes. Rechts: Zur Bestimmung von δ aus der gemessenen oberen Kulminationshöhe h_1 eines Sternes im Meridian.

Sterne werden relativ zu diesen gemessen. Dabei gilt für die gemessenen Unterschiede in Sternzeit und Kulminationshöhe zwischen zwei Sternen

$$\Delta \Theta = \Delta \alpha ,$$

$$\Delta h_1 = \Delta \delta .$$

Dieses Verfahren wird relative Ortsmessung genannt.

Selbst wenn man annimmt, die Instrumente arbeiteten ohne Fehler, so muss man dennoch weitere Effekte für die genaue Messung der Koordinaten berücksichtigen, z. B. den Einfluss der Erdatmosphäre (Refraktion, Abschn. 2.6.2), den Einfluss der Erdbewegung (Aberration, Abschn. 1.7.3) oder den wechselnden Standort des Beobachters (Parallaxe, Abschn. 1.8).

Der „normale“ Benutzer verlässt sich daher auf (möglichst umfangreiche) Positionskataloge. Da diese wegen der bereits besprochenen Änderungen aber nicht zu weit in die Zukunft extrapoliert werden dürfen, müssen regelmäßig zu neuen Epochen verbesserte Versionen abgeleitet oder neu beobachtet werden.

1.7.3

Die Aberration des Lichts

Aus dem täglichen Leben ist folgendes Phänomen bekannt: Sitzt man bei Regen in einem wartenden Zug, so sieht man bei Windstille den Regen senkrecht zu Boden fallen. Fährt der Zug dagegen mit einer genügend hohen Geschwindigkeit, so erscheint der Regen dem bewegten Beobachter aus einer anderen etwas in Fahrtrichtung geneigten Richtung zu kommen. Dieser Effekt beruht natürlich einfach auf der vektoriellen Addition der Geschwindigkeiten von Beobachter und Regentropfen.

Es gibt ein entsprechendes Phänomen beim Licht, das *Aberration* genannt wird. Allerdings besteht Licht nicht aus materiellen Teilchen, und die Auswirkungen einer Bewegung des Beobachters relativ zur Ausbreitungsrichtung des Lichts kann nur im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie korrekt beschrieben werden. Hier beschränken wir uns auf eine kurze Darstellung der Auswirkungen der Aberration des Lichts: Ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Einfallrichtung eines Lichtstrahles (Lichtgeschwindigkeit c) bewegt, sieht den Lichtstrahl aus einer um den Winkel α anderen Richtung kommen als ein ruhender oder in Richtung des Lichtstrahles bewegter Beobachter. Dabei gilt für $v \ll c$

$$\frac{v}{c} = \tan \alpha \approx \alpha . \quad (1.35)$$

Bilden v und c den Winkel γ , so interessiert für die Winkelabweichung nur die zu c senkrechte Komponente von v , also

$$\alpha = \frac{v}{c} \sin \gamma . \quad (1.36)$$

Für den mit der Erde mitbewegten Beobachter treten drei Aberrationseffekte auf. Die *tägliche Aberration* wird hervorgerufen durch die Rotation der Erde. Bei der

geographischen Breite φ beträgt die Rotationsgeschwindigkeit $v = v_{\text{Äquator}} \cdot \cos \varphi$, und mit $v_{\text{Äquator}} = 0.465 \text{ km s}^{-1}$ ergibt sich eine maximale Aberration für Sterne im Meridian, wo $\gamma = 90^\circ$, von

$$\alpha = 0.32'' \cdot \cos \varphi .$$

Die *tägliche Aberration* verschiebt also die Sehlinie zu jedem Stern bei seiner Kulmination um einen Winkel α in östlicher Richtung. Dieser Winkelverschiebung entspricht eine Verspätung des Sternes beim Durchgang durch den Meridian, die vom Äquator zum Pol zunimmt, gemäß $\Delta t = 0.021^{\text{s}} \cdot \cos \varphi / \cos \delta$. Dies ist eine bis dicht an den Pol heran gültige Näherung.

Die *jährliche Aberration* wird verursacht durch die Bewegung der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne mit $v \approx 30 \text{ km s}^{-1}$, so dass $v/c \approx 10^{-4}$. Vereinfachend sei angenommen, dass v längs der Bahn konstant ist. Nach Gl. (1.36) ergibt sich dann für jede Bahnstelle ein in Bogensekunden ausgedrückter Aberrationswinkel von $\alpha = k \cdot \sin \gamma$; $k = 20.47''$ ist die Aberrationskonstante. Für einen in der Ekliptikebene stehenden Stern variiert γ während eines Umlaufes von 0° bis 360° , so dass der Stern auf einer Geraden der Länge $2k$ hin und her pendelt. Ein Stern mit der ekliptikalischen Breite β beschreibt während eines Jahres am Himmel eine Ellipse mit der großen Halbachse k und der kleinen Halbachse $k \cdot \sin \beta$.

Die *säkulare Aberration* rührt von der Bewegung des Sonnensystems als Ganzes her. Dieses läuft nämlich mit einer Geschwindigkeit von etwa 200 km s^{-1} um das Zentrum der Milchstraße. Daraus resultiert eine große Aberration (zum Zielpunkt der momentanen Sonnenbewegung hin), die aber konstant ist, da in historischen Zeiten der Geschwindigkeitsvektor konstant bleibt. Da v/c ungefähr sieben- bis achtmal so groß ist wie für die jährliche Parallaxe, kann man die „galaktische Aberrationskonstante“ zu $\sim 150''$ abschätzen. Bei zukünftigen Winkelmessungen mit Genauigkeiten um 10^{-6} Bogensekunden wird ihr Gradient bestimmbar werden.

1.8

Die Parallaxe

Die Parallaxe p ist die Winkeldifferenz zwischen den beiden Positionen α_1 und α_2 , die man für das gleiche astronomische Objekt von zwei verschiedenen Standorten B_1, B_2 aus misst (s. Abb. 1.14). Die Größe dieser Differenz hängt offenbar ab von der Entfernung r des Objekts und dem Abstand der Standorte ($a =$ Basislänge).

Hier kommt erstmalig die *Entfernung* der Himmelskörper ins Spiel! Je nachdem, wodurch die Standortänderung hervorgerufen wird, unterscheidet man verschiedene Parallaxeneffekte.

Die *tägliche Parallaxe* wird dadurch verursacht, dass der Beobachtungsort durch die Erdrotation an verschiedene Stellen relativ zum vermessenen Objekt gebracht wird. Es ist daher sinnvoll, die Koordinaten auf den – bei der Rotation festbleibenden – Erdmittelpunkt zu beziehen. Die von dort gemessene Position würde sich gegenüber der von der Erdoberfläche gemessenen um den Winkel p unterscheiden

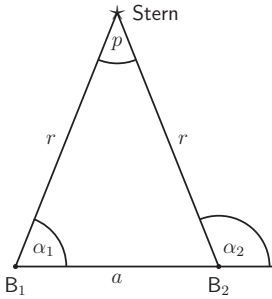


Abb. 1.14 Zur trigonometrischen Parallaxe.

mit $\sin p = a/r \cdot \sin z$ (s. Abb. 1.15 links). Der Winkel p hat ein Maximum, wenn der Stern im Horizont steht; diesen Maximalwert p_t nennt man *Horizontalparallaxe*, sie ist der Winkel, unter dem der Erdhalbmesser a vom Stern aus erscheint. Aus $\sin p_t = a/r$ ergibt sich mit gemessenem p_t und bekanntem a die Entfernung r . Da a relativ klein ist, ist p_t nur für Körper des Sonnensystems messbar. Die Werte betragen für den Mond $p_{t,\text{Mond}} = 57'2.5''$, und für die Sonne $p_{t,\odot} = 8.8''$.

Die *jährliche Parallaxe* kann demgegenüber noch bei wesentlich größeren Entfernungen r gemessen werden; hierfür wird nämlich eine größere Basis a benutzt, und zwar der Radius der Erdbahn um die Sonne.

Beobachtet man einen Stern der ekliptikalen Breite β von den verschiedenen Stellen der Erdbahn aus, so beschreibt seine gemessene Position im Verlaufe eines Jahres eine elliptische Bahn mit der großen Halbachse π und der kleinen Halbachse $\pi \cdot \sin \beta$ (s. Abb. 1.15 rechts). Offensichtlich ist

$$\sin \pi = \frac{a}{r}. \quad (1.37)$$

Die jährliche Parallaxe π eines Sternes ist also derjenige Winkel, unter dem der Erdbahnradius vom Stern aus gesehen erscheint.

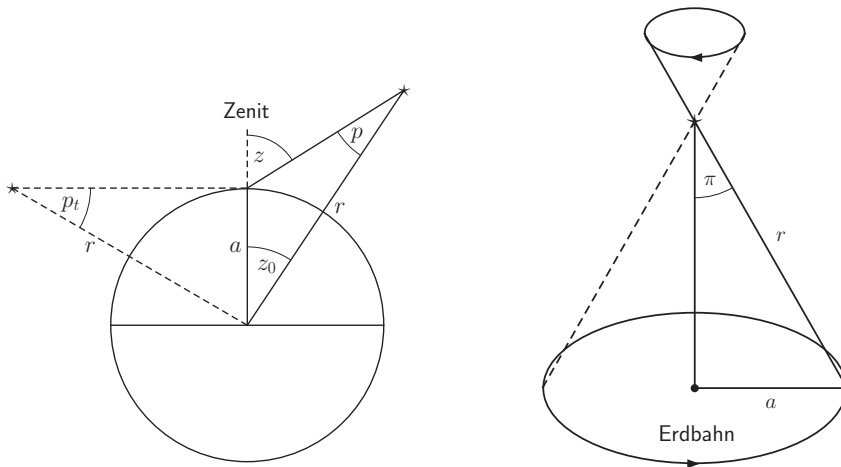


Abb. 1.15 Links: Zur täglichen Parallaxe. Rechts: Zur jährlichen Parallaxe.

Der Parallaxe $\pi = 1''$ entspricht die Entfernung $r = 206\,265$ Erdbahnradien. Diese Entfernung wird ein *Parsec* (1 pc) genannt; sie ist die normalerweise benutzte Längeneinheit für Entfernungen, die über das Sonnensystem hinausreichen. 1 pc ist in etwa der typische Abstand zweier benachbarter Sterne in der Sonnenumgebung. Das Licht durchläuft diese Strecke in 3.26 Jahren. Zwischen der Einheit pc und anderen Einheiten gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ pc} &= 206265 \text{ Erdbahnradien} \\ &= 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m} \\ &= 3.26 \text{ Lichtjahre} \end{aligned}$$

Da π sehr klein ist, kann man $\sin \pi$ in Gl. (1.37) durch π ersetzen. Dann gilt für die in Bogensekunden gemessene Parallaxe

$$\pi/1'' = 1 \text{ pc}/r. \quad (1.38)$$

Die Messung der jährlichen Parallaxe ermöglicht also eine trigonometrische Entfernungsbestimmung, die einzige direkte Methode zur Entfernungsmessung von Sternen. Die größte Parallaxe wurde für Proxima Centauri gemessen mit $\pi = 0.772''$, $r = 1.3 \text{ pc}$.

Heute können Parallaxen bis zu etwa $0.001''$ bestimmt werden, insbesondere mit Satellitentechniken. Der speziell für astrometrische Messungen gebaute HIPPARCOS-Satellit hat zu Beginn der 1990er Jahre die Reichweite für trigonometrische Parallaxen auf einige 100 pc verschoben und Daten für mehr als 10^5 Sterne geliefert. Wenn man jedoch bedenkt, dass der Durchmesser der Milchstraße ungefähr 30 kpc beträgt, sieht man, dass damit immer noch nur Sterne in der „Umgebung“ der Sonne erfasst werden. Mit dem Start des GAIA-Satelliten in wenigen Jahren wird sich diese Grenze auf 10 kpc und für einige Sterne noch darüber hinaus verschieben.

1.9

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

- 1.1 Leiten Sie aus dem 3. Keplerschen Gesetz eine Formel für die vom Zentralkörper aus gemessene Winkelgeschwindigkeit her, in Abhängigkeit vom Bahnradius a unter der Annahme einer Kreisbahn.
- 1.2 Genau an der Oberfläche eines Sterns (Masse M_* , Radius R_*) laufe ein kleiner Körper (Masse $m \ll M_*$) in einer Kreisbahn um. Der Stern soll als homogene Kugel der Dichte ρ aufgefasst werden.
 - (a) Wie hängt die Umlaufzeit U von ρ ab?
Wie groß ist U bei:
 - (b) der Sonne;
 - (c) einem „Weißen Zwerg“ mit $M = M_\odot$ und $R = 10^{-2} R_\odot$?

- 1.3 Ein Raumschiff befindet sich auf der Verbindungslinie Erde-Mond und wird von beiden Körpern gleich stark angezogen. Wie weit ist es vom Mond entfernt? Wo liegt der entsprechende Punkt im System Erde-Sonne?
- 1.4 Zeigen Sie, dass der Virialsatz für ein einfaches Zweikörpersystem und Kreisbahnbewegung gültig ist.
- 1.5 Stellen Sie eine Masse-Dichte-Relation für Schwarze Löcher auf, wobei Sie für das „Volumen“ eine Kugel mit dem Radius r_S (Schwarzschild-Radius) ansetzen. Berechnen Sie r_S und Dichten für (a) eine Erdmasse; (b) eine Sonnenmasse; (c) eine Million Sonnenmassen.
- 1.6 Welche äquatorialen Koordinaten α , δ (Rektaszension, Deklination) hat die Sonne zu Beginn des
 (a) Sommerhalbjahres,
 (b) Winterhalbjahres?
- 1.7 Im Jahr 2005 explodierte die Supernova 2005dp in der Galaxie NGC 5630. Ein nahe gelegener Stern hat die Koordinaten $\alpha = 04^{\text{h}}27^{\text{m}}38.3^{\text{s}}$, $\delta = +41^{\circ}13'54''$. Die Supernova liegt $1'23''$ nördlich und $19''$ östlich des Sterns. Wie groß ist der Abstand Stern-Supernova in Bogensekunden? Wie lauten die (äquatorialen) Koordinaten der Supernova, natürlich wieder ausgedrückt in Stunden bzw. Grad/Minuten/Sekunden?
- 1.8 An welchen Stellen der Erdoberfläche gelten folgende Aussagen?
 (a) Die tägliche Bewegung der Sterne erfolgt auf Kreisen parallel zum Horizont.
 (b) Der Himmelssüdpol hat eine Höhe von 30° über dem Horizont.
 (c) Es gibt keine Zirkumpolarsterne.
 (d) Die Sonne steht jährlich genau einmal im Zenit.
 (e) Alle Sterne mit Deklination $\delta > 50^{\circ}$ sind zirkumpolar.
- 1.9 Erfinden Sie eine „Kalenderregel“ (Regelung der Schaltjahre) für einen Planeten, bei dem das Tropische Jahr 263.5912 Tage dauert. In welcher Zeit wächst der noch verbleibende Fehler der mittleren Jahreslänge auf einen Tag an?
- 1.10 Bestimmen Sie die Entfernung zwischen den Sternen α Centauri und Proxima Centauri in Astronomischen Einheiten. Die Koordinaten beider Sterne sowie ihre Parallaxen sind:
- | | | | |
|---------------|--|---------------------------------|-----------------|
| α Cen: | $\alpha = 14^{\text{h}}36^{\text{m}}11^{\text{s}}$, | $\delta = -60^{\circ}37'48''$, | $\pi = 0''.743$ |
| Proxima Cen: | $\alpha = 14^{\text{h}}26^{\text{m}}19^{\text{s}}$, | $\delta = -62^{\circ}28'6''$, | $\pi = 0''.761$ |
- 1.11 Welchen Betrag in Metern hätten die Entfernungseinheiten, die eine Venusbewohnerin analog zu unseren Einheiten Parsec und Lichtjahr definieren würde?

