Eine Aussage ist ... eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Aristoteles

1. Einiges über Logik[1]

Bevor man über Zahlen, Größen, Zusammenhänge, Funktionen usw. sprechen kann, muß man sich über den Umgang mit Sätzen und Satzfolgen verständigen, in denen solche Begriffe auftauchen.
„Verständigen" wird dabei – die Mathematik kennzeichnend – in einem stärkeren Sinne verwendet als in der Umgangssprache üblich.
Sind P und Q Personen, so bedeute „P verständigt sich mit Q":

(1) P versteht, was Q sagt, und umgekehrt,

(2) P akzeptiert, was Q sagt, und umgekehrt.

Wenn freilich nicht über alle, so ist doch über gewisse Dinge Verständigung nach Regeln möglich. Die Lehre von den allgemeinsten Regeln der Verständigung heißt *Logik*, eine Verständigungshandlung gemäß solchen Regeln heißt *Argumentation* (auch *Schließen, Deduzieren*).

Beispiel

(1) Berlin ist eine Stadt.

(2) Wenn Berlin eine Stadt ist, dann ist Berlin kein Dorf.

---

(3) Berlin ist kein Dorf

Die Sätze (1), (2) heißen *Prämissen*, (3) die *Konklusion*, und der waagerechte Strich hat die Bedeutung eines „also". Auch wenn man sich über die Prämissen streiten kann, so muß doch jeder, der (1) und (2) akzeptiert, auch (3) akzeptieren. So etwas läßt sich in Regeln fassen, und um die wird es in diesem Kapitel gehen.

Es ist hier nicht möglich (und auch nicht nötig), mehr als eine Skizze der Logik zu formulieren. Es ist auch fast nicht möglich, beim ersten Durcharbeiten alles zu verstehen. Die im folgenden aufgeschriebenen Regeln werden aber später beim Formulieren und Beweisen von mathematischen Aussagen immer klarer werden und der Umgang mit ihnen immer selbstverständlicher.

[1] Dieses Kapitel orientiert sich an einer Vorlesung von U.-W. Schmincke, TH Aachen, aus deren Einleitung auch das Zitat vor dem Vorwort stammt.

1.1 Aussagenlogik (Junktorenlogik)

Eine *Aussage* ist ein Satz, bei dem es uns sinnvoll erscheint, ihm genau eines der beiden Attribute „Wahr“ (W), „Falsch“ (F) zuzuordnen, worüber nach einem abgesprochenen Verfahren entschieden können werden muß[2]. Die Attribute W, F heißen *Wahrheitswerte*.
Sprechweisen für „A hat den Wahrheitswert W“ sind:

„A ist wahr“
„A gilt“
„A ist erfüllt“

Beispiele
Aussagen sind:

(1) „Berlin ist eine Stadt“.
(Entscheidungsverfahren etwa: Stadt heißt eine zusammenhängende Siedlung mit mehr als 10.000 Einwohnern; man gehe zum Einwohnermeldeamt).

(2) „Es gibt eine Zahl mit $x^2 + 2x + 1 = 0$“
(Entscheidungsverfahren: Man gebe eine solche Zahl an, z.B. $x = -1$).

(3) Es gibt ein Perpetuum mobile 1. Art
(Wahrheitswert F (Vereinbarung der Physiker)).

(4) Wenn dieser Tisch rund ist, dann freß' ich einen Besen.
(Wahrheitswert?)

Nichtaussagen sind:

(5) Hans fährt nach München oder Monika fährt nach München und Peter fährt mit.
(Inhalt nicht verstehbar: Fährt nun Peter nur mit, wenn Monika fährt oder auch, wenn Hans fährt?)

(6) Dieser Kaffee ist doppelt so heiß wie dieser hier.
(Was ist „doppelt so heiß“?)

(7) $\sqrt{1-x^2}$
(Dies ist ein Term, siehe Abschnitt 4.1.)

(8) $x^2 + 2x + 1 = 0$
(Was ist denn x?).

[2] Diese Vereinbarung ist nicht präzise und sicherlich abhängig von dem Personenkreis, der sich jeweils über einen Satz verständigen will. In der Schwierigkeit, sich zu einigen, ob ein Satz eine Aussage ist, und darüberhinaus sich über ein Verfahren zur Entscheidung des Wahrheitswertes zu verständigen, unterscheiden sich (weite Bereiche der) Naturwissenschaften von (weiten Bereichen der) Geisteswissenschaften.

Man betrachte z. B. die beiden folgenden Aussagen:
„Dieser Würfel Eisen hat eine Temperatur von $183^0 \pm 4^0 C$.“
„Der Umgang der Menschen mit der Erde ist ein Beleg für den Freud'schen Todestrieb.“
Es ist offenbar einfacher, sich über ein Verfahren zur Entscheidung des Wahrheitswertes der ersten Aussage zu einigen, als im Falle der zweiten Aussage. In der Physik etwa wird ein solches Entscheidungsverfahren jeweils ein bekanntes (und reproduzierbares!) Experiment sein.

Sind A, B zwei Aussagen, so lassen sich mittels der *Junktoren* (d.h. „Verbinder") neue Aussagen herstellen:

Junktor	Bedeutung (Interpretation)	Zeichen
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjunktion	A und B	$A \wedge B$
Adjunktion	A oder B	$A \vee B$
Materiale Implikation	wenn A, dann B	$A \Rightarrow B$
Materiale Äquivalenz	A genau dann, wenn B	$A \Leftrightarrow B$

Die Wahrheitswerte der so zusammengesetzten Aussagen sind festgelegt durch die in der folgenden Tabelle enthaltene Normierung. (Eine Tabelle dieser Art heißt *Wahrheitstafel.*)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Es sei betont, daß diese Tabelle eine Normierung, also Festlegung der Bedeutung der Junktoren ist. Für diese Festlegung spricht einzig, daß sie sich als praktisch herausgestellt hat.
Die Adjunktion „$\vee$" ist so normiert, daß $A \vee B$ wahr ist, wenn A wahr oder B wahr oder beide wahr sind, also im nicht-ausschließenden Sinn.
Die Normierung der materialen Implikation „$\Rightarrow$" ist am schwierigsten einzusehen und etwa so zu verstehen: Es ist ausgeschlossen, daß A gilt und nicht B. Ein Beispiel für die letzte Zeile in „$A \Rightarrow B$" (A falsch und B falsch) ist Aussage (4) im Beispiel von p. 2, die also den Wahrheitswert W hat (natürlich nur dann, wenn der Tisch *nicht* rund ist). Ist A die Aussage: „Ich werfe einen Euro in den Automaten", B die Aussage: „Ich bekomme einen Kaffee", und vereinbart man, der Aussage „$A \Rightarrow B$" den Wahrheitswert W zuzuordnen, falls man nicht unzufrieden ist, so erhält man die oben angegebene Normierung.

Übliche Sprechweisen für „$A \Rightarrow B$":

„Wenn A, dann B"
„Aus A folgt B"
„Wenn A gilt, so gilt B"
„B gilt dann, wenn A gilt"
„A gilt nur dann, wenn B gilt"
„A ist hinreichend für B"
„B ist notwendig für A"

Ähnlich sind für „$A \Leftrightarrow B$" die folgenden Sprechweisen üblich:

„A ist äquivalent zu B"
„A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"
„A gilt genau dann, wenn B gilt"
„A ist hinreichend und notwendig für B"

Die Buchstaben A, B, ... , die hier als „Platzhalter“ für Aussagen verwendet wurden, heißen *(Aussage-) Variablen*, die aus ihnen mittels Junktoren (und Klammern) hergestellten Zeichenreihen heißen *Aussageformen*.

Hier ist eine Lücke: Wir haben nicht vereinbart, nach welchen Regeln die Zeichenreihen gebildet werden dürfen; das wäre die Syntax (Grammatik) der Junktorenlogik. Wir müssen uns beschränken auf die grobe Beschreibung: eine Aussageform ist eine aus Aussagevariablen, Junktoren und Klammern hergestellte Zeichenreihe, die bei *Belegung*, d.h. der Ersetzung der Aussagevariablen durch Aussagen, zu einer Aussage wird. Der Wahrheitswert der so entstandenen Aussage ist dann über die Normierung der Junktoren ermittelbar, wenn die Wahrheitswerte der Einzelaussagen bekannt sind.

Aussageformen sind z.B.

$$A \Rightarrow (B \vee A)$$
$$(A \wedge B) \Rightarrow \big(\neg(\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$$ [3]
$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)\ .$$

Nun eine erste *Definition*, also eine Vereinbarung, wie ein Begriff oder ein Name im folgenden benützt wird.

Definition 1.1

Eine Aussageform heißt *allgemeingültig* oder *Tautologie*, wenn sie bei jeder Belegung zu einer Aussage mit Wahrheitswert W wird.

Satz 1.1

Die folgenden Aussageformen sind Tautologien:

(1) $A \Rightarrow A$

(2) $A \vee \neg A$

(3) $\neg(A \wedge \neg A)$

(4) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

(5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(6) $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(7) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(8) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(9) $\big(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big) \Leftrightarrow A$

(10) $\big((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

[3] Wie bei „mal vor plus“ bezieht sich $\neg$ immer nur auf die nachfolgende Aussage, und man läßt die Klammern dann weg; d.h. $\neg A \wedge C$ ist zu verstehen als $(\neg A) \wedge C$.
Will man dagegen $A \wedge C$ verneinen, muß man Klammern setzen, also $\neg(A \wedge C)$.

Beweis

Man erstelle die Wahrheitstafeln. Wir führen dies für die Aussageformen (7), (9), (10) durch:

Zu (7):

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	(7)
W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W

Zu (9):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$	(9)
W	W	F	F	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	F	W
F	F	W	W	F	F	W

Zu (10):

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$C \wedge \neg C$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$	$A \Rightarrow B$	(10)
W	W	W	F	F	F	W	W	W
W	W	F	F	F	F	W	W	W
W	F	W	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	F	W
F	W	W	F	F	F	W	W	W
F	W	F	F	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	F	W	W	W

■

(Der kleine schwarze Kasten bedeutet: Ende des Beweises.)

Aufgabe 1.1

Seien A, B, C Aussagevariablen. Man zeige, daß folgende Aussageformen Tautologien sind.

(1) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$

(2) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(3) $\big((A \wedge B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big((A \vee C) \wedge (B \vee C)\big)$.

Aufgabe 1.2

Man zeige:

(1) Seien A, B zwei wahre Aussagen.
Dann ist

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{wahr.}$$

(2) Seien A, B Aussagevariablen.
Dann ist

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{keine Tautologie}$$

(also $A \vee B$ nicht logisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$, s. Definition 1.2).

Tautologien werden benötigt, um zu „schließen". Wir verwenden zur Abkürzung von Aussageformen Zeichen wie (a), (b), ...

Man schreibt z.B.

$$(a) :\Leftrightarrow \big((\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A\big).$$

Das Zeichen „:⇔" heißt *definitorische Äquivalenz*, zu verstehen etwa als „habe die gleiche Bedeutung wie". Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des zur Abkürzung eingeführten Symbols.

Seien nun $(a_1), \cdots, (a_n), (b)$ (n eine natürliche Zahl) Aussageformen.

Eine Zeichenreihe
$$\begin{array}{c} (a_1) \\ (a_2) \\ \vdots \\ (a_n) \\ \hline (b) \end{array}$$

auch geschrieben: $(a_1), \ldots, (a_n) \Vdash (b)$ heißt *Schluß*.

Definition 1.2

(1) Zwei Aussageformen $(a), (b)$ heißen *logisch äquivalent*,
geschrieben $(a) \quad äq \quad (b)$,
wenn $(a) \Leftrightarrow (b)$ allgemeingültig ist.

(2) Ein Schluß $(a_1), \ldots, (a_n) \Vdash (b)$ heißt *gültig (korrekt)*, wenn

$$\big((a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)\big) \Rightarrow (b)$$

allgemeingültig ist. (Ein gültiger Schluß heißt auch *logische Implikation*.)

Ein korrekter Schluß ist demnach so festgelegt, daß gilt:
Bei jeder Belegung der in dem Schluß auftretenden Aussageformen, bei der alle *Prämissen* $(a_1), \ldots, (a_n)$ wahr sind, ist auch die *Konklusion* (b) wahr. Hat bei einer Belegung etwa eine der Prämissen den Wahrheitswert F, dann auch $(a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)$.
Damit ist $\big((a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)\big) \Rightarrow (b)$ wahr unabhängig vom Wahrheitswert von (b).

Satz 1.2

(1) Es gilt:

(i) $\neg(A \Rightarrow B) \quad äq \quad (A \wedge \neg B)$

(ii) $\big(\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \quad äq \quad A$

(iii) $\big((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \quad äq \quad (A \Rightarrow B)$

(2) Folgende Schlüsse sind korrekt:

(i) $A \wedge \neg A \quad \Vdash \quad B$

(ii) $A, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad B$

(iii) $A \Rightarrow B,\ \neg B \quad \Vdash \quad \neg A$

(iv) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \quad \Vdash \quad A \Rightarrow C$

(v) $\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C) \quad \Vdash \quad A$

(vi) $A, \big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \quad \Vdash \quad B$

Bemerkungen

(1) Die Sätze 1.1 und 1.2 beinhalten Aussagen über Aussageformen. Die Beweise sind der Nachweis, daß diese Aussagen den Wahrheitswert W haben, wobei hier die Wahrheitstafeln das Entscheidungsverfahren liefern.

(2) Sind (a) und (b) logisch äquivalente Aussageformen, so kann in jeder Aussageform (c), die (a) als Teil enthält, (a) durch (b) ersetzt werden, ohne daß sich die „Bedeutung“ von (c) ändert, d.h. bei jeder Belegung hat (c) vor und nach dem Ersetzen jeweils den gleichen Wahrheitswert.

(3) (2) (i) aus dem Satz oben ist das „ex falso quodlibet“ : aus etwas Falschem kann man auf alles schließen.
(2) (ii) entspricht dem üblichen direkten Beweis der Aussage B unter Voraussetzung A.
(v) und (vi) in (2) geben die logische Struktur eines *indirekten* oder *Widerspruchsbeweises* wieder. In (2)(v): „Wenn aus $\neg A$ ein *Widerspruch* (d.h. eine Aussageform, die bei jeder Belegung falsch ist) folgt, dann gilt A.“ In (2)(vi): „Wenn A gilt, und aus $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgt, dann gilt B.“

(4) In Satz 1.2 sind die Aussagevariablen auch durch Aussageformen ersetzbar.

Beweis (von Satz 1.2)

zu (1):	(i)	mit (8) in Satz 1.1
	(ii)	mit (9) in Satz 1.1
	(iii)	mit (10) in Satz 1.1
zu (2):	(i), (ii), (iii)	mit Wahrheitstafeln
	(iv)	mit (6) in Satz 1.1
	(v)	mit (9) in Satz 1.1
	(vi)	mit (10) in Satz 1.1 und (2)(ii) in Satz 1.2

■

Aufgabe 1.3

Seien A, B Aussagevariablen. Man zeige unter Benutzung von Aufgabe 1.1 (1), (2) und Satz 1.1 (8):

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \text{ äq } \big((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\big) .$$

Aufgabe 1.4

Seien A, B Aussagevariablen. Welche der folgenden Schlüsse sind korrekt?

(i) $\neg A, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad \neg B$

(ii) $A, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad B$

(iii) $\neg B, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad \neg A$

(iv) $B, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad A$

Aufgabe 1.5

Man überlege, welche der folgenden Aussagen durch Belegung eines korrekten Schlusses entstanden sind:

(i) Wenn F zuhause ist, brennt sein Licht. Sein Licht brennt nicht. Also ist F nicht zuhause.

(ii) Wenn F nicht zuhause ist, ist sein Auto nicht vor der Tür. F ist zuhause. Also ist sein Auto vor der Tür.

1.2 Quantoren

Streicht man in einer Aussage einen oder mehrere *Dingnamen* (das sind Wörter oder Zeichen, die etwas kennzeichnen oder benennen), so erhält man ein *Prädikat*. Die Anzahl der entstandenen Leerstellen heißt *Stellenzahl* des Prädikats, z.B.

einstellige Prädikate:

(1) „ ... ist eine Stadt“,

(2) „ ... ist durch zwei teilbar“,

(3) „ ... ist sterblich“,

zweistellige Prädikate:

(4) „Die Differenz zwischen ... und ... ist ein Vielfaches von vier“,

(5) „ ... ist mit ... befreundet“,

dreistellige Prädikate:

(6) „Die Differenz zwischen ... und ... ist ein Vielfaches von ... “.

Prädikate werden abgekürzt durch

$$\begin{array}{ll} A(\ ), B(\ ), \cdots & \text{(einstellige Prädikate)} \\ A(\ ,\ ), B(\ ,\ ), \cdots & \text{(zweistellige Prädikate),} \end{array}$$

$$\text{z.B.} \quad \begin{array}{lll} A(\ ) & :\Leftrightarrow & \ldots \text{ ist eine Stadt.} \\ A(\ ,\ ) & :\Leftrightarrow & \ldots \text{ ist mit } \ldots \text{ befreundet.} \end{array}$$

(Gleichzeitig werden diese Zeichen als Platzhalter für Prädikate, also als *Prädikatvariablen* verwendet.)

Setzt man in die Leerstellen eines Prädikats geeignete Dingnamen ein, so erhält man eine Aussage. Man muß sich freilich einigen, welche Dingnamen an welcher Stelle eingesetzt werden dürfen; diese Dingnamen nennt man *zulässig*. Meistens wird im folgenden klar sein, welche Dingnamen zulässig sind; wenn nicht, muß darüber erst Einigkeit erzielt werden, bevor das Prädikat verwendet wird.

Wir erweitern nun den Begriff Aussageform von p. 4:

Eine Zeichenreihe, gebildet aus Aussagevariablen, Dingvariablen (d.h. Platzhaltern für Dingnamen), Prädikaten, Prädikatvariablen und Junktoren, die bei Belegung, d.h. Ersetzen von Aussagevariablen durch Aussagen, Prädikatvariablen durch Prädikate bzw. Dingvariablen durch (zulässige) Dingnamen, zu einer Aussage wird, heißt *Aussageform*.

Z.B.: $\big(A \wedge A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow C(x,y)$, [4]
x ist sterblich,
x ist mit y befreundet $\vee\, C$,
x ist durch 2 teilbar.

Nehmen wir eine Streichholzschachtel mit 17 Streichhölzern.
Seien $s_1, \cdots, s_{17}$ die (Namen der) Streichhölzer, die dann (die einzigen) zulässigen Dingnamen des Prädikats

$$A(\ ) \quad :\Leftrightarrow \quad \ldots \text{ ist abgebrannt}$$

seien.

Man kann dann mit $A(\ )$ Aussagen herstellen:

$A(s)$, wobei s eines der siebzehn Streichhölzer ist,

$A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{17})$, also die Aussage:
alle Streichhölzer sind abgebrannt

$A(s_1) \vee A(s_2) \vee \cdots \vee A(s_{17})$, also die Aussage:
(wenigstens) ein Streichholz ist abgebrannt.

Allgemein:

Sei $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat. Dann läßt sich aus der Aussageform $A(x)$ auf folgende Weisen eine Aussage herstellen:

(1) Man ersetzt die Dingvariable x durch einen (zulässigen) Dingnamen.

(2) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: für alle x, abgekürzt durch $\bigwedge_x$, also: $\bigwedge_x A(x)$,
gesprochen: für alle x gilt $A(x)$.

(3) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: es gibt ein x, abgekürzt durch $\bigvee_x$, also: $\bigvee_x A(x)$,
gesprochen: es gibt (wenigstens) ein x mit $A(x)$.

Die Zeichen $\bigwedge$, $\bigvee$, ein „großes“ $\wedge$ bzw. $\vee$, heißen *Allquantor*, bzw. *Existenzquantor*,[5] das Vorschalten von Quantoren nennt man *Quantifizieren*.

[4] Man versuche als Übung, aus dieser Aussageform durch Belegung eine Aussage zu erhalten.

[5] Andere Zeichen sind $\forall$ und $\exists$, wobei die Korrespondenz durch $\bigwedge \leftrightarrow \forall$, $\bigvee \leftrightarrow \exists$ gegeben ist. Wegen des Zusammenhangs mit $\wedge$ und $\vee$ und den de Morgan'schen Regeln (s. nächste Seite) halte ich die hier eingeführten für besser.

Ist $A(\ ,\ )$ ein zweistelliges Prädikat, so sind

$$\begin{aligned} A(y) \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x A(x,y)\ , \\ B(y) \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigvee_x A(x,y) \end{aligned}$$

wieder Aussageformen.
Man nennt dann x eine *gebundene*, y eine *freie Variable.*

(Diese Namen werden später auch bei gewissen *Termen* (s. Abschnitt 4.1) benutzt: in

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad \int_a^x \frac{1}{t}\,dt$$

sind k, t gebundene, n, a, x freie Variablen.)

Gebundene Variablen können durch beliebige andere Variablen, die nicht frei in der Aussageform auftauchen, ersetzt werden, d.h.

$$\bigwedge_x A(x,y) \quad , \quad \bigwedge_t A(t,y) \quad , \quad \bigwedge_* A(*,y)$$

sind die gleichen Aussageformen. Dagegen ist $\bigwedge_y A(y,y)$ natürlich etwas anderes.

Durch zweifaches Quantifizieren erhält man aus $A(\ ,\ )$ acht Aussagen:

$$\begin{array}{ll} \bigwedge_y \bigwedge_x A(x,y) \qquad\qquad & \bigvee_y \bigwedge_x A(x,y) \\ \bigvee_y \bigvee_x A(x,y) & \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y) \end{array}$$

und die entsprechenden, wenn x unter dem ersten und y unter dem zweiten Quantor steht.

Die logischen Regeln für den Umgang mit Quantoren, genauer:

> die allgemeingültigen (d.h. bei jeder Belegung wahren) Formeln, in denen Quantoren auftreten, heißen *Quantorenregeln.*

Ganz wichtig z.B.: Sei $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat. Dann sind allgemeingültig (*de Morgan'sche Regeln*):

$$\begin{aligned} \neg \bigwedge_x A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_x \neg A(x) \\ \neg \bigvee_x A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x \neg A(x) \end{aligned}$$

In Worten: Vertauschen von Verneinung und Quantor dreht den Quantor um. Wie in der Aussagenlogik schreibt man dann

$$\neg \bigwedge_x A(x) \quad \text{äq} \quad \bigvee_x \neg A(x).$$

Falls das Prädikat $A(\ )$ nur endlich viele zulässige Dingnamen hat, dann erhält man die de Morgan'schen Regeln aus den logischen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) \quad &\text{äq} \quad \neg A \vee \neg B\ , \\ \neg(A \vee B) \quad &\text{äq} \quad \neg A \wedge \neg B\ . \end{aligned}$$

Mit obigem Beispiel der 17 Streichhölzer $s_1, \ldots, s_{17}$ und der Aussageform

$$A(\ ) \quad :\Leftrightarrow \quad \ldots \text{ ist abgebrannt}$$

gilt also:

$$\begin{aligned} \neg \bigwedge_x A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\big(A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{17})\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg A(s_1) \vee \neg A(s_2) \vee \cdots \vee \neg A(s_{17}) \\ &\Leftrightarrow \quad \bigvee_x \neg A(x). \end{aligned}$$

Weitere Quantorenregeln:

$$\begin{aligned} \bigwedge_x \Big(A(x) \wedge B(x)\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x A(x) \wedge \bigwedge_x B(x) \\ \bigvee_x \Big(A(x) \vee B(x)\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_x A(x) \vee \bigvee_x B(x) \\ \Big(\bigwedge_x A(x) \vee \bigwedge_x B(x)\Big) \quad &\Rightarrow \quad \bigwedge_x \Big(A(x) \vee B(x)\Big) \\ \bigvee_x \Big(A(x) \wedge B(x)\Big) \quad &\Rightarrow \quad \Big(\bigvee_x A(x) \wedge \bigvee_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \Big(A(x) \ \Rightarrow\ B(x)\Big) \quad &\Rightarrow \quad \Big(\bigvee_x A(x) \ \Rightarrow\ \bigvee_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \Big(A(x) \ \Rightarrow\ B(x)\Big) \quad &\Rightarrow \quad \Big(\bigwedge_x A(x) \ \Rightarrow\ \bigwedge_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \bigwedge_y A(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigwedge_y \bigwedge_x A(x,y) \\ \bigvee_x \bigvee_y A(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_y \bigvee_x A(x,y) \\ \bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) \quad &\Rightarrow \quad \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y) \end{aligned}$$

Diese Regeln entsprechen durchweg den vom sogenannten gesunden Menschenverstand erzeugten Wünschen, wie man erkennt, wenn man sie in der Umgangssprache formuliert.

Z.B. die 4. Regel:
Wenn es ein x gibt so, daß $A(x)$ und $B(x)$ gelten (also der Vorsatz wahr ist; denn nur dann ist etwas zu zeigen), dann gibt es sicher ein x_1 so, daß $A(x_1)$ und ein x_2 so, daß $B(x_2)$ gilt (etwa x_1 und x_2 gleich dem x, für das $A(x) \wedge B(x)$ gilt).

Daß in der letzten Regel „$\Rightarrow$" nicht durch „$\Leftrightarrow$" ersetzt werden darf, also i.a.

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) \quad \text{und} \quad \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$$

Aussagen mit verschiedenem Wahrheitswert sind, wird durch folgendes Beispiel einsichtig:

$$A(x,y) \quad :\Leftrightarrow \quad y \text{ kann mit } x \text{ glücklich werden,}$$

wobei wir für x Namen von Frauen und für y Namen von Männern (oder umgekehrt) zulassen:

$$\bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$$

hat dann die Bedeutung: zu jedem Mann gibt es eine Frau, mit der er glücklich werden kann. Dagegen bedeutet

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y):$$

es gibt eine Frau, mit der alle Männer glücklich werden können.

Aufgabe 1.6

(1) Man formuliere folgende Aussagen mit Hilfe von Quantoren, negiere sie und formuliere die Negation wieder in der Umgangssprache.

  (i) Für jede positive reelle Zahl ε gibt es eine positive reelle Zahl δ so, daß für alle positiven reellen Zahlen x gilt: Ist $x < \delta$, dann ist $x^2 < \varepsilon$.

  (ii) Zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl N so, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) Man vertausche in der (wahren) Aussage (ii) die ersten beiden Quantoren und versuche, die so entstandene Aussage als falsch zu erkennen.

Die Quantorenregeln (die aus dem Kalkül der Quantorenlogik stammen, auf den wir hier nicht weiter eingehen wollen) sind verträglich mit dem sogenannten Kalkül des natürlichen Schließens. Dieser läßt sich exemplarisch so beschreiben:

Sind etwa $A(\ )$ und $B(\ )$ Prädikate mit reellen Zahlen als zulässige Dingnamen, dann darf man bei der Untersuchung der Aussage

$$\bigwedge_x \big(A(x) \quad \Rightarrow \quad B(x)\big) \tag{1}$$

vorgehen, indem man beginnt mit: sei x eine reelle Zahl. Dann darf x behandelt werden wie der Name einer festen Zahl und folglich $A(x)$ und $B(x)$, als wären es Aussagen. Läßt sich dann $A(x) \Rightarrow B(x)$ ableiten, so ist Aussage (1) bewiesen.

Z.B. $\quad A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x > 1 \quad , \quad B(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 > x$

Beh.: $\bigwedge_x (x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > x)$

Bew.: Sei x eine reelle Zahl.

1. Fall: $x \leq 1$, dann ist $A(x)$ falsch, also $A(x) \Rightarrow B(x)$ wahr.

2. Fall: $x > 1$. Dann ist insbesondere $x > 0$ und die „Ungleichung“ $x > 1$ darf mit x multipliziert werden. Dies gibt $x^2 > x$, also $B(x)$. Somit ist $A(x) \Rightarrow B(x)$ wahr.

Die Aussage in der Behauptung ist damit bewiesen.

1.3 Mengen

Bisher hatten wir die Aussage „Hans hat ein Auto“ aufgegliedert wie folgt:

$$\underbrace{\textit{Hans}}_{\text{Dingname}} \quad \underbrace{\textit{hat ein Auto}}_{\text{Prädikat}}.$$

Die Idee der Mengenlehre ist nun, solche Aussagen auf die einheitliche Form „x ist y“ zu bringen, zu interpretieren als: „x erfüllt das Prädikat y“. In obigem Beispiel: „Hans ist Auto-habender“ oder besser „Hans ist Autobesitzer“. Nun kann man das Prädikat „Autobesitzer sein“ wieder als „Ding“ auffassen, (z.B. in das Prädikat „ ... ist keine exklusive Eigenschaft“ einzusetzen). Unser Beispielsatz wird dann neu gegliedert:

$$\underbrace{\textit{Hans}}_{\text{Dingname}} \quad \underbrace{\textit{ist}}_{\text{Prädikat}} \quad \underbrace{\textit{Autobesitzer}}_{\text{Dingname}}.$$

Die *Mengenlehre* läßt sich wie folgt charakterisieren:

(1) Der Dingbegriff wird erweitert, indem Dinge, einstellige Prädikate, einstellige Prädikate von Prädikaten, ... als „Dinge“ behandelt werden, die die Objekte der Sprache sind und einheitlich *Klassen* genannt werden. D.h. man geht auf eine neue Weise mit Prädikaten um. In unserem Beispiel wird – grob gesprochen – das Prädikat „Autobesitzer sein“ identifiziert mit einem Topf, in dem alles drin ist, was das Prädikat „Autobesitzer sein“ erfüllt. Man schreibt

$$A \;:=\; \{x \mid x \text{ ist Autobesitzer}\}\ ,$$

gesprochen: A ist definitorisch gleich der Klasse (bzw. Menge, s. unter (3)) aller x, die das Prädikat „Autobesitzer sein“ erfüllen.

(2) Ein spezielles zweistelliges Prädikat, nämlich „ ... ist ... “ wird ausgezeichnet, und es werden Regeln über den Umgang mit ihm vereinbart. Es wird mit „$\in$“ bezeichnet, und man schreibt statt $\in (x, y)$ immer: $x \in y$.
„$\in$“ darf nur in Bedeutung der folgenden Art verwendet werden:

... ist Element von ...
... kommt in ... vor
... hat die Eigenschaft ...
... ist Mitglied von ...

(3) Gewisse „gutartige“ Klassen werden ausgezeichnet und dann Mengen genannt.

Der Begriff „Menge“ wurde von G. Cantor (1845-1918) wie folgt eingeführt:

> „Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Mit den bisher bereitgestellten Begriffen ausgedrückt, bedeutet das: Ist $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat, dann gibt es eine Klasse y, die genau diejenigen Elemente x enthält, für die $A(x)$ gilt, oder, in Zeichen:

$$\bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \;\Leftrightarrow\; A(x)) \ . \tag{1}$$

Dies entspricht unseren Wünschen (wird in dem Bereich der Mathematik, der auf uns zukommt, auch erfüllt sein), führt aber schnell zu Widersprüchen:

Beschränken wir uns auf die Bücher x, y, ... einer Bibliothek.
$x \in y$ habe die Bedeutung: das Buch x ist im Buch y registriert.

Ein Bibliothekar habe den Auftrag, zu Eigenschaften, die Bücher haben können (dargestellt durch Prädikate $A(\ )$, $B(\ )$, ... , z.B. „ ... ist vor 1970 erschienen“, „ ... hat mehr als 1000 Seiten“, „ ... ist auf rosa Papier gedruckt“) gemäß (1) einen Registerband anzulegen. Das geht eine Weile gut, bis er einen Band y anlegen will, in dem genau diejenigen Bücher registriert sind, die sich nicht selbst registrieren, also

$$\bigwedge_x (x \in y \;\Leftrightarrow\; x \notin x) \ .$$

$\big($das Zeichen $\notin$ ist definiert durch $\quad x \notin y :\Leftrightarrow \neg(x \in y)\big)$.

Was ist mit diesem Band y selbst? Registriert er sich nicht, dann muß er sich registrieren, registriert er sich selbst, dann darf er sich nicht registrieren, also:

$$y \in y \;\Leftrightarrow\; y \notin y \ .$$

So ein y gibt es nicht, also

$$\neg \bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \;\Leftrightarrow x \notin x) \ .$$

Das ist die *Russell-Antinomie* in einer der vielen möglichen Einkleidungen. Als Russell 1901 diesen Widerspruch in der Mengenlehre entdeckte, war die damalige Mathematikerwelt ganz schön durcheinander, und es dauerte eine ganze Weile, bis sie sich wieder gefangen hatte. (Einen ähnlichen Schock hat dann Kurt Gödel 1931 ausgelöst mit seinem Beweis der Existenz von unentscheidbaren Sätzen in arithmetischen Systemen.)

Ausweg: Eine Klasse x heißt *Menge*, wenn es eine Klasse y gibt mit $x \in y$,

$$Mg(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_y (x \in y) \ .$$

Dann gilt:
$$\bigvee_y \bigwedge_x \Big(x \in y \;\Leftrightarrow\; \big(A(x) \text{ und } Mg(x)\big)\Big) \ .$$

In unserem Bibliotheksbeispiel müßte der Bibliothekar also sagen, daß er natürlich nur solche Bücher x registrieren könne, die *registrierbar* sind, d.h. ein Band y, wenn nicht schon vorhanden, so doch hergestellt werden kann, in dem x registriert ist, also $x \in y$ gilt. Das Buch y, in dem alle Bücher x mit $x \notin x$ registriert sind, ist selbst nicht registrierbar.

Ein anderes, bekanntes Beispiel der Russell-Antinomie ist der Friseur, der in ein Dorf kommt und einen Vertrag unterschreibt, daß er genau die Männer im Dorf rasieren muß, die sich nicht selbst rasieren. Was macht er nun mit seinem eigenen Bart?

Zurück zu dem Teil der Mengenlehre, der für uns wichtig sein wird: Es wird vereinbart, und hat bisher nicht zu Widersprüchen geführt, daß die natürlichen Zahlen eine Menge bilden, woraus folgt, daß auch die reellen Zahlen eine Menge sind, und das ist schon das Wichtigste. Ist $A(\ )$ ein Prädikat, so wird dasjenige y mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_x \Big(x \in y \quad \Leftrightarrow \quad \big(A(x) \text{ und } Mg(x)\big)\Big)$$

geschrieben als $\{x \,|\, A(x) \text{ und } Mg(x)\}$.

Da wir in der Zukunft nur mit Mengen umgehen und $A(x)$ meist von der Form $(x \in M) \wedge \tilde{A}(x)$ mit einer geeigneten Menge M und einer Aussageform $\tilde{A}(x)$ ist, lassen wir den Zusatz „und $Mg(x)$“ weg, also

$$y \;=\; \{x \,|\, A(x)\} \,,$$

gesprochen: y ist die Menge aller x mit $A(x)$.

Definition 1.3

Seien M, N Mengen, dann sind *Gleichheit* und *Inklusion* vereinbart durch

$$\begin{aligned} M = N \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x (x \in M \;\Leftrightarrow\; x \in N) \\ M \subset N \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x (x \in M \;\Rightarrow\; x \in N) \,. \end{aligned}$$

Man beachte: Ist $M \subset N$, so ist $M = N$ nicht ausgeschlossen.[6]

Sind $M = \{x \,|\, A(x)\}$, $N = \{x \,|\, B(x)\}$, so ist aufgrund obiger Definition

$$M = N \Leftrightarrow \bigwedge_x \big(A(x) \Leftrightarrow B(x)\big) \,, \qquad M \subset N \Leftrightarrow \bigwedge_x \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$$

Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
Z.B.

$$\begin{aligned} \emptyset \;&=\; \{x \,|\, A \wedge \neg A\}, \\ \emptyset \;&=\; \{x \,|\, x \text{ reelle Zahl und } x^2 + 1 = 0\}, \\ \emptyset \;&=\; \{x \,|\, x \neq x\} \,. \end{aligned}$$

[6]Dies ist in der Literatur nicht einheitlich: Bisweilen wird „$\subseteq$“ statt „$\subset$“ benutzt, und „$\subset$“ hat dann die Bedeutung von *echt enthalten*, wofür wir dann „$\subsetneq$“ benutzen.

Es gibt nur *eine* leere Menge. Denn seien $\emptyset, \emptyset'$ leere Mengen, dann gilt für alle $x : x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset'$, da ja sowohl $x \in \emptyset$ als auch $x \in \emptyset'$ für jedes x falsch ist, also

$$\bigwedge_x (x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset') \quad , \text{d.h.} \quad \emptyset = \emptyset' \; .$$

Aufgabe 1.7

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

$$\emptyset \subset \{\emptyset\} \, , \quad \emptyset \in \{\emptyset\} \, , \quad 0 \in \{\emptyset\} \, , \quad \{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset, \emptyset\} \, , \quad \emptyset \in \emptyset \; .$$

Seien M, N Mengen, dann sind ebenfalls Mengen (was z.T. bewiesen werden kann, z.T. vereinbart ist):

$$\begin{aligned}
M \cap N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} && \textit{(Durchschnitt)} \\
M \cup N &:= \{x \mid x \in M \vee x \in N\} && \textit{(Vereinigung)} \\
M \backslash N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} && \textit{(Differenz)} \\
\mathcal{P}(M) &:= \{x \mid x \subset M\} && \textit{(Potenzmenge).}
\end{aligned}$$

Das dabei benutzte Zeichen „:=“ ist die *definitorische Gleichheit*. In Analogie zur definitorischen Äquivalenz (s. p. 6) steht der Doppelpunkt auf der Seite des Gleichheitszeichens, auf der ein neuer Name oder ein Symbol für eine Menge vereinbart wird. Das Kennzeichnen definitorischer Gleichheiten ist von nicht zu unterschätzender Wichtigkeit. Oft wird das Verstehen mathematischer oder physikalischer Literatur dadurch erschwert oder gar unmöglich gemacht, daß nicht erkennbar ist, was durch was definiert ist, oder gar, ob es sich um eine Definition oder eine Aussage handelt (hier die Gleichheit zweier, eventuell früher eingeführter Mengen).

Sind M, N, L Mengen, dann gilt, wie man einfach nachweist:

$$\left.\begin{aligned}
M \cap N &= N \cap M \\
M \cup N &= N \cup M
\end{aligned}\right. \qquad \textit{(Kommutativität)}$$

$$\left.\begin{aligned}
(M \cap N) \cap L &= M \cap (N \cap L) \\
(M \cup N) \cup L &= M \cup (N \cup L)
\end{aligned}\right. \qquad \textit{(Assoziativität)}$$

$$\left.\begin{aligned}
M \cap (N \cup L) &= (M \cap N) \cup (M \cap L) \\
M \cup (N \cap L) &= (M \cup N) \cap (M \cup L)
\end{aligned}\right. \qquad \textit{(Distributivität)}$$

Ist M Menge, so bezeichne für jede Teilmenge $N \subset M$

$$\mathcal{C}_M N := M \backslash N$$

das *Komplement* von N bezüglich M. Für zwei Teilmengen $N, L \subset M$ gilt dann

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{C}_M (N \cap L) &= \mathcal{C}_M N \cup \mathcal{C}_M L \\
\mathcal{C}_M (N \cup L) &= \mathcal{C}_M N \cap \mathcal{C}_M L
\end{aligned}\right. \qquad \textit{(de Morgan'sche Regeln).}$$

(Wenn klar ist, welche „Obermenge“ M gemeint ist, schreibt man $\mathcal{C}N$ statt $\mathcal{C}_M N$.)

Sind $a_1, \cdots, a_n$ endlich viele Objekte, so bezeichne $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ diejenige Menge, die genau $a_1, a_2, \cdots, a_n$ als Elemente enthält, also

$$\{a_1, \cdots, a_n\} \quad := \quad \{x \mid x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_n\} \ .$$

Aufgabe 1.8

(1) Sei M eine Menge, und seien K, L Teilmengen von M.
Man zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $K \subset L$

(ii) $K \cap L = K$

(iii) $K \cup L = L$

(iv) $\mathcal{C}_M L \subset \mathcal{C}_M K$

(2) Warum genügt es, in (1)

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}$$

zu beweisen $\big($im Sinn von (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) usw.$\big)$?

Aufgabe 1.9

Man zeige:
Für zwei Mengen M, N ist i.a. $\mathcal{P}(M \cup N) \neq \mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N)$ $\big($i.a. (= im allgemeinen) bedeutet dabei: es gibt zwar Mengen M, N bei denen die Gleichheit oben richtig ist, aber eben auch solche, bei denen die Ungleichheit gilt.

Bemerkung

Sei M eine Menge und im folgenden bei Aussageformen stets „$\wedge\ x \in M$“ zu ergänzen. K, L, N seien Teilmengen von M, also Elemente von $\mathcal{P}(M)$, und gelte

$$K \quad = \quad \{x \mid K(x)\} \ , \qquad L \quad = \quad \{x \mid L(x)\} \ , \qquad N \quad = \quad \{x \mid N(x)\}$$

mit geeigneten Prädikaten $K(\ ), L(\ ), N(\ )$.

Es lassen sich dann alle Durchschnitts-, Vereinigungs- und Komplementbildungen, Teilmengen und Gleichheitsaussagen in die Junktoren- und Aussageformsprache „übersetzen“ mittels folgender Tabelle:

K	L	N	$\cap$	$\cup$	$\mathcal{C}$	$\subset$	$=$	$\emptyset$
$K(x)$	$L(x)$	$N(x)$	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge \neg A$

Die entsprechend entstandene Aussageform, versehen mit $\bigwedge\limits_x$, hat dann die gleiche Bedeutung wie die in der „Mengensprache“ erzeugte Zeichenreihe, also z.B.

$$K \subset L \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_x \Big(K(x) \ \Rightarrow \ L(x) \Big) \ ,$$

$$(K \cap L) \subset (K \cup L) \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_x \Big(\big(K(x) \wedge L(x)\big) \ \Rightarrow \ \big(K(x) \vee L(x)\big) \Big) \ ,$$

$$K \cap \mathcal{C}_K = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_x \Big(\big(K(x) \wedge \neg K(x)\big) \ \Leftrightarrow \ (A \wedge \neg A) \Big) \ .$$

Wollen wir in Allaussagen $\bigwedge\limits_x A(x)$ und Existenzaussagen $\bigvee\limits_x A(x)$ nicht alle x zur Konkurrenz zulassen, sondern nur x aus einer Menge M, so sind folgende Schreibweisen üblich:

$\bigwedge\limits_x \big(x \in M \quad \Rightarrow \quad A(x)\big)$	$\bigvee\limits_x \big(x \in M \quad \wedge \quad A(x)\big)$
$\bigwedge\limits_{x \in M} A(x)$	$\bigvee\limits_{x \in M} A(x)$
$A(x) \qquad (x \in M)$	$A(x) \qquad (x \in M \text{ geeignet})$.

Man beachte, daß in der ersten Zeile einmal „$\Rightarrow$“ und einmal „$\wedge$“ steht. Damit zeigt man dann, daß

$$\neg \bigwedge_{x \in M} A(x) \quad \text{äq} \quad \bigvee_{x \in M} \neg A(x)$$

gilt (vgl. p. 10). Wir werden im folgenden All- und Existenzaussagen meist in der letzten der obigen Darstellungen formulieren.