Grundsätzliches vorneweg: Geometrische Grundbegriffe

1

In diesem Kapitel...

- Kurz und bündig: Was Geometrie ist
- Vier Voraussetzungen für eine gute Definition
- Undefinierbare, aber beschreibbare Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene
- Definierbare Begriffe: Geradenabschnitt, Strahl, Winkel
- Axiome und Sätze

Sie wissen, dass Geometrie ein Teilbereich der Mathematik ist. So viel ist klar. Wahrscheinlich wissen Sie aber nicht, was Geometrie eigentlich ganz genau ist und was alles mit ihr zu tun hat. Dann sind Sie hier richtig. Dieses Kapitel ist den Grundlagen auf der Spur. Es erklärt das Konzept der Geometrie und definiert das bunte Allerlei, das mit ihr einhergeht – direkt und einfach.

Im Folgenden gibt es keine mathematische Kleiderordnung nach dem Motto »Pinguin im Frack« – genauso wenig wie eine steife und humorfreie Präsentation der Geometrie. Lockern Sie also Ihre Krawatte und wechseln Sie in die Hausschuhe. Denn: Ab hier wird es zwanglos!

Geometrie, das ist ...

Zuerst zur wörtlichen Definition: Geometrie stammt von dem griechischen Wort *geometria* ab. *Ge* bedeutet »Erde« und *metre* »Messung«, also bezeichnete Geometrie im alten Griechenland die »Feldmesskunst«.

http://www.wiley-vch.de/publish/dt/books/ISBN3-527-70298-5

Zunächst eine inhaltliche Definition, korrekt und hochintellektuell: Unter Elementargeometrie versteht man die Anwendung von Definitionen, Axiomen und Sätzen, die auf Euklids Werk *Elemente* von ca. 300 v. Chr. basieren.

Und zuletzt das, was Sie wirklich wissen wollten: Geometrie ist ein Teilbereich der Mathematik, der sich mit den Ausmaßen, Eigenschaften und Verhältnissen von allen zwei- und dreidimensionalen Gebilden befasst – von dem kleinsten Dreieck bis zum größten Kreis oder Rechteck und vielem mehr.

Euklid: Der Vater der Geometrie

Euklid war ein griechischer Mathematiker, der etwa 300 v. Chr. lebte. Seine exakten Lebensdaten sind nicht bekannt, sein Werk dagegen durchaus. Euklids bekanntestes Werk ist *Stoicheia*, griechisch für »Elemente«. Im zwölften Jahrhundert wurde *Elemente* ins Lateinische übersetzt und erhielt den Titel *Elementa*. Unter welchem Namen auch immer, dieses Werk ist das einflussreichste Mathematikbuch aller Zeiten. Euklids *Elemente* besteht aus 13 Büchern, in denen er Axiome, Sätze und Definitionen logisch herleitet. Zwei weitere Bücher, 14 und 15, sind mit Euklids Werk ebenfalls meist überliefert, obwohl sie nicht von ihm stammen.

Folgende Bücher aus den *Elementen* sind für die Geschichte der Geometrie von besonderer Bedeutung. In den nachfolgenden Kapiteln werden Sie die Parallelen entdecken.

Buch 1 behandelt Dreiecke, ihre Konstruktion, Eigenschaften und die Verhältnisse ihrer Seiten und Winkel zueinander.

Buch 3 beschäftigt sich mit der elementaren Geometrie von Kreisen mitsamt Sehnen, Sekanten und Tangenten.

Buch 4 erforscht die Problematik, die sich ergibt, wenn man Polygone in Kreise einbeschreibt oder umgekehrt. Dabei geht es hauptsächlich um Dreiecke und regelmäßige Polygone.

Buch 5 behandelt die Ähnlichkeitslehre, eine Basis für ähnliche Dreiecke.

Buch 6 wendet die Theorien von Buch 5 auf die zweidimensionale Geometrie an. Dieser Stoff stammt ursprünglich von Pythagoras, wurde aber von Euklid optimiert.

Die Bücher 11 bis 13 beschäftigen sich mit dreidimensionaler Geometrie.

Begriffe der Geometrie

Dieser Abschnitt definiert die unterschiedlichen Begriffe, die Ihnen in der Geometrie begegnen werden. Moment, das stimmt nicht ganz: Da die Geometrie unter anderem mit so etwas wie *undefinierten Grundbegriffen* arbeitet, werden im Folgenden verschiedene geometrische Begriffe definiert *und* weitere Begriffe beschrieben, die einfach nicht definierbar sind.

Aber bevor ich mich ans Definieren und Beschreiben mache, muss ich Ihnen erklären, was ich unter einer guten Definition verstehe. Ich unterscheide vier Eigenschaften, die ich Ihnen am Beispiel einer Hauskatze verdeutlichen möchte. Sehen Sie sich Mimi in Abbildung 1.1 an.

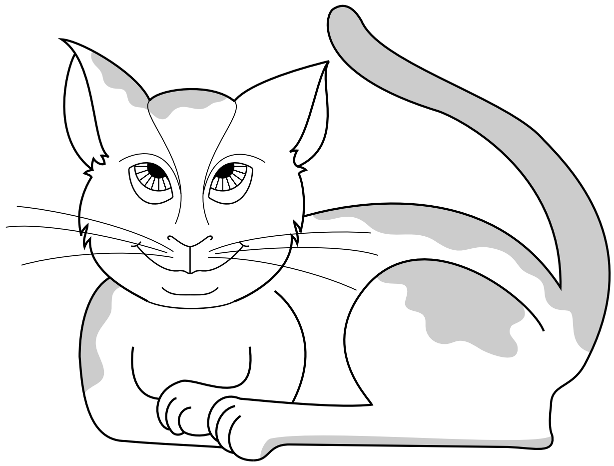

Abbildung 1.1: Mimi ist laut Definition einfach eine Katze – sagen Sie es ihr bloß nicht!

Zur Definition der Katze: Eine Hauskatze ist ein Tier der Gattung *Felis domestica* mit einziehbaren Krallen, das Mäuse tötet.

Meine vier Eigenschaften einer guten Definition:

✔ Der zu definierende Begriff kommt in der Definition vor.

In der Definition einer Hauskatze erwähne ich, was ich definiere – eine Hauskatze.

✔ Der zu definierende Begriff wird einer Klasse oder Gattung zugeordnet.

In unserer Definition erwähne ich, dass eine Hauskatze der Gattung *Felis domestica* angehört.

✔ Der zu definierende Begriff wird von anderen Begriffen abgegrenzt, ohne unnötige Informationen zu liefern.

In der Hauskatzen-Definition erwähne ich, dass eine Katze einziehbare Krallen hat und Mäuse tötet. Vielleicht ist der Teil »das Mäuse tötet« mehr als unbedingt nötig. Aber auch diese Information kann wichtig sein, um eine Katze deutlicher von anderen Tieren zu unterscheiden.

✔ Die Definition ist umkehrbar.

Funktioniert unsere Definition noch? Kehren wir sie um und prüfen das: Ein Tier der Gattung *Felis domestica* mit einziehbaren Krallen, das Mäuse tötet, ist eine Katze. Klingt logisch.

Grundbegriffe – beschreiben statt definieren

Die Geometrie bedient sich vieler definierter Begriffe, aber einige dieser definierten Begriffe arbeiten mit undefinierten Begriffen in ihren Definitionen. Das mag komplizierter klingen, als es ist. *Undefinierte Begriffe* sind Wörter, die bereits so grundlegend sind, dass sie nicht mehr mit einfacheren Begriffen definiert werden können. Also beschreibt man sie, anstatt sie zu definieren. Undefinierte Begriffe oder auch Grundbegriffe der ebenen Geometrie sind ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene.

Ein Punkt

Ein *Punkt* ist ein Punkt – Punktum! Das meinte ich mit grundlegenden Begriffen. In Abbildung 1.2 können Sie einen Vorzeige-Punkt bewundern. Er wird in der Mathematik üblicherweise mit einem einzigen Großbuchstaben benannt. Ein Punkt hat keine Größe und ist eindimensional, das heißt, er hat weder Breite noch Länge noch Tiefe. Er bezeichnet lediglich eine eindeutige Position. Abgesehen davon, dass er einen Ort festlegt, existiert ein Punkt also physisch eigentlich nicht.

Abbildung 1.2: Ein Punkt

Eine Gerade

Wie kommen Sie am schnellsten von einem Punkt zum anderen? Auf einer Geraden. Ein bisschen Geometrie und schon werden Sie pünktlich sein! Eine *Gerade* ist – wie der Name sagt – vollkommen gerade, hat keinen Durchmesser und besteht aus Punkten, die sich in beiden Richtungen unendlich fortsetzen (Abbildung 1.3). Alle Punkte, die auf einer Geraden liegen, heißen kollinear (Abbildung 1.4). Eine Gerade kann sowohl mit einem Kleinbuchstaben als auch mit zwei auf ihr liegenden Punkten benannt sein.

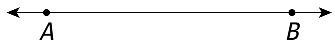

Abbildung 1.3: Eine Gerade

Abbildung 1.4: Kollineare Punkte, die eine Gerade ergeben

Eine Ebene

Eine Ebene ist zweidimensional, besitzt also sowohl Länge als auch Breite, aber keine Tiefe. Eine *Ebene* in der Geometrie ist eine unbegrenzte Fläche, die unendlich in jede Richtung erweitert werden kann (Abbildung 1.5). Eine Ebene besteht aus allen Geraden, die man durch zwei sich schneidende Geraden zeichnen kann. Sie ist definiert durch genau drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, also nichtkollinear sind. Umgekehrt gilt das Gleiche: Genau eine Ebene enthält drei nichtkollineare Punkte (Abbildung 1.6). Eine Ebene wird dargestellt mit einem vierseitigen Polygon und bezeichnet mit einem Großbuchstaben, der in eine Ecke eingetragen wird.

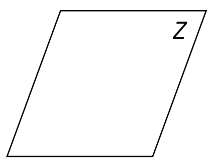

Abbildung 1.5: Eine Ebene

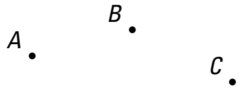

Abbildung 1.6: Genau eine Ebene enthält drei nichtkollineare Punkte

Nicht mehr ganz so grundsätzlich – Begriffe mit Definitionen

Definierte Begriffe in der Geometrie können definiert werden (okay, das liegt auf der Hand) und erfüllen meine vier Voraussetzungen für eine gute Definition. Definierte Begriffe sind eine Strecke, eine Halbgerade und ein Winkel.

Eine Strecke

Eine Strecke ist, anders als eine Gerade, keine unendliche Geschichte. Sie hat sowohl einen Anfang als auch ein Ende. Eine *Strecke* ist ein Teil einer Geraden, der durch zwei Endpunkte eindeutig begrenzt ist (Abbildung 1.7). Die Namen dieser Endpunkte bezeichnen zusammen die Strecke. Obwohl die Strecke nur nach diesen beiden Punkten heißt, besteht sie zusätzlich aus allen Punkten, die zwischen den beiden Endpunkten liegen. Eine Strecke hat eine begrenzte Länge und kann deswegen – anders als die Gerade – gemessen werden.

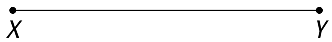

Abbildung 1.7: Eine Strecke

Eine Halbgerade

Eine Halbgerade wird auch Strahl genannt und hat – wie ein Sonnenstrahl, der bei der Sonne beginnt und sich in den Himmel erstreckt – einen Anfang, aber kein Ende. Eine *Halbgerade* ist Teil einer Geraden, die nur einen Endpunkt hat und sich in einer Richtung unendlich fortsetzt (Abbildung 1.8). Ähnlich wie eine Strecke besteht eine Halbgerade aus einer unendlichen Anzahl von Punkten. Eine Halbgerade wird benannt nach ihrem Endpunkt und einem Punkt auf der Geraden, wobei in diesem Buchstabenpaar der Endpunkt zuerst steht.

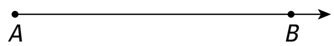

Abbildung 1.8: Eine Halbgerade

Ein Winkel

Wenn Geraden aufeinander treffen, können sie eine Beziehung eingehen. In dem sozialen Umfeld von Geraden heißt dieses Treffen Winkel. Ein typischer Winkel sieht ungefähr wie der Buchstabe *V* aus (Abbildung 1.9). Ein *Winkel* ist das, was entsteht, wenn zwei Halbgeraden oder Strecken in der Spitze von diesem *V* aufeinander treffen. Dieser Punkt wird gemeinsamer Anfangspunkt genannt. Die Strecken oder Halbgeraden bilden die Seiten oder *Schenkel* des Winkels. Der gemeinsame Anfangspunkt, nach dem der Winkel benannt wird, heißt *Scheitel*. Übrigens sehen nicht alle Winkel wie der Buchstabe *V* aus – welche es tun und welche nicht, erfahren Sie in Kapitel 2.

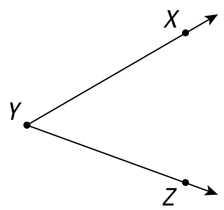

Abbildung 1.9: Ein Winkel

Axiome: Vertrauen statt Kontrolle

Im täglichen Leben ist es einfach anzunehmen, dass etwas wahr ist, weil es wahr erscheint. Das Gleiche gilt für die Geometrie. Auch hier kann man bestimmte Behauptungen oder grundsätzliche Vermutungen als wahr akzeptieren, ohne sich die Mühe zu machen, sie erst zu beweisen. Für diejenigen unter Ihnen mit Vertrauensproblemen könnte diese Tatsache zunächst schwer nachzuvollziehen sein. Wenn Sie aber erst merken, wie viel Arbeit Sie sich damit ersparen, bin ich mir sicher, dass Sie damit klarkommen werden. Diese Behauptungen oder Grundsätze, die man als wahr akzeptieren kann, nennt man *Axiome*. Das Wichtigste, das Sie sich zu diesen Axiomen merken müssen, ist, dass Sie sie *niemals* zu beweisen brauchen. Beherrschen Sie diese Grundsätze, können Sie sich beim geometrischen Rechnen eine Menge Zeit und Ärger ersparen.

Hier ein Beispiel – Ihr erstes Axiom. Es liefert Informationen über eine Gerade und ist eine selbstverständliche, aber schwer zu beweisende Tatsache:

Axiom 1.1: Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.

Das heißt? Man braucht zwei Punkte, um eine Gerade zu zeichnen.

Das Wort Axiom kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie »als wahr angenommener Grundsatz«. Ich wusste, dass der Einstieg in die Geometrie um einiges erfüllender ist, wenn ich Ihnen auch solche Dinge erkläre. Oder etwa nicht?

Sätze: Beweise antreten

Ein Satz ist auf eine gewisse Weise das Gegenteil eines Axioms. Während ein Axiom ein Grundsatz ist, der ohne Beweis als wahr akzeptiert wird, ist ein *Satz* eine Aussage, die bewiesen werden *muss*. Um Sätze zu beweisen, bedient man sich Axiomen. Einen Satz zu beweisen, ist Teil eines Verfahrens, dessen nächster logischer Schritt ein geometrischer Beweis ist. Das sollte für den Moment genügen. (Zu Beweisen finden Sie noch genug in Kapitel 4.) Hier nur ein Beispiel für einen Satz, damit Sie einen Vorgeschmack auf das bevorstehende Vergnügen bekommen.

Satz 1.1: Wenn sich zwei Geraden kreuzen, tun sie das an genau einem Punkt.

Eng verwandt mit einem Satz ist ein *Korollar*. Das ist eine Feststellung, die sich aus einem Satz oder einem Axiom ohne großen Aufwand ergibt.

Okay, das sollte erst einmal genügen. Nun sind Sie vertraut mit den Grundbegriffen, die Ihnen bei der Beschäftigung mit der Geometrie begegnen werden. Und jetzt wird es Zeit, dieses Wissen anzuwenden!