

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| Über die Autorin   | 9         |
| Danksagung   | 9         |
| <b>Einführung</b>  | <b>19</b> |
| Über dieses Buch   | 19        |
| Konventionen in diesem Buch  | 20        |
| Törichte Annahme über den Leser                                    | 21        |
| Wie dieses Buch aufgebaut ist                                      | 21        |
| Teil I: Sich warm machen: Geometrische Grundlagen                  | 21        |
| Teil II: Sich verteidigen: Beweise erbringen                       | 21        |
| Teil III: In Form kommen: Geometrische Figuren                     | 21        |
| Teil IV: Partei ergreifen: Ungleichungen und Ähnlichkeiten         | 21        |
| Teil V: Aufsteigen: Geometrie für Fortgeschrittene                 | 22        |
| Teil VI: Der Top-Ten-Teil  | 22        |
| Teil VII: Anhang   | 22        |
| Symbole, die in diesem Buch verwendet werden                       | 22        |
| Wie es weitergeht  | 23        |
| <b>Teil I</b>  |           |
| <b><i>Sich warm machen:</i></b>                                    |           |
| <b><i>Geometrische Grundlagen</i></b>                              | <b>25</b> |
| <b>Kapitel 1</b>   |           |
| <b><i>Grundsätzliches vorneweg: Geometrische Grundbegriffe</i></b> | <b>27</b> |
| Geometrie, das ist ...   | 27        |
| Begriffe der Geometrie   | 28        |
| Grundbegriffe – beschreiben statt definieren                       | 29        |
| Nicht mehr ganz so grundsätzlich – Begriffe mit Definitionen       | 31        |
| Axiome: Vertrauen statt Kontrolle                                  | 32        |
| Sätze: Beweise antreten  | 32        |
| <b>Kapitel 2</b>   |           |
| <b><i>Geraden und Winkel, so weit das Auge reicht</i></b>          | <b>33</b> |
| Geraden unter der Lupe   | 33        |
| Strecken messen  | 33        |
| Strecken zeichnen  | 34        |
| Einen Blick zwischen Endpunkte wagen                               | 34        |

|  |           |
|--|-----------|
| Bis in den letzten Winkel                                      | 36        |
| Die verschiedenen Winkel kennen lernen                         | 38        |
| Winkel messen und zeichnen                                     | 39        |
| Winkel und ihre Nachbarn                                       | 42        |
| Auch Winkel haben Beziehungen                                  | 43        |
| Sätze über Sätze über Winkel                                   | 45        |
| Kreuzweise: Geraden bilden Winkel                              | 45        |
| Schiffe in Reih und Glied                                      | 47        |
| Schiffe kreuz und quer   | 48        |
| <br>   |           |
| <b>Teil II</b>   |           |
| <b><i>Sich verteidigen: Beweise erbringen</i></b>              | <b>53</b> |
| <br>   |           |
| <b>Kapitel 3</b>   |           |
| <b><i>Logik: A und O aller Beweise</i></b>                     | <b>55</b> |
| Aus dem Sherlock-Holmes-Handbuch: Verschiedene Beweisführungen | 55        |
| Direkter Beweis: Der Weg durch die Mitte                       | 55        |
| Induktiver Beweis: Vom Besonderen auf das Allgemeine           |           |
| Deduktiver Beweis: Vom Allgemeinen auf das Besondere           |           |
| Indirekter Beweis: Ein guter Widerspruch                       |           |
| Alles will begründet sein                                      |           |
| Reflexivität: Spieglein, Spieglein an der Wand                 |           |
| Symmetrie: Balance halten!                                     |           |
| Transitivität: Ein Tauschhandel                                |           |
| Substitution: Genauso gut wie das Original                     |           |
| Die Additionsregel   | 61        |
| Die Subtraktionsregel  | 62        |
| Die Multiplikationsregel                                       | 62        |
| Die Divisionsregel   | 63        |
| Regeln für Wurzeln und Potenzen                                | 63        |
| Aussagen dürfen – ein paar Regeln                              | 63        |
| <br>   |           |
| <b>Kapitel 4</b>   |           |
| <b><i>Beweisverfahren leicht gemacht</i></b>                   | <b>65</b> |
| Die formalen Schritte für Beweise oder: Geometrie-Walzer       | 65        |
| Das Spiel mit den Beweisen                                     | 67        |
| Auf Umwegen: indirekt beweisen                                 | 72        |
| Wenn Sie wollen ... dann gibt es eine Aussage                  | 75        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Teil III</b>   |           |
| <b><i>In Form kommen: Geometrische Figuren</i></b>                              | <b>79</b> |
| <b>Kapitel 5</b>  |           |
| <b><i>Polygone als Aperitif (Ein Vorgeschmack auf geschlossene Figuren)</i></b> | <b>81</b> |
| Polygon? Nie gehört!  | 81        |
| Polygone und ihre Namen   | 82        |
| Wie Winkel ins Spiel kommen   | 83        |
| Polygontypen  | 84        |
| Das Innenleben eines Polygons   | 84        |
| Konvex oder konkav – das ist hier die Frage                                     | 84        |
| Ab durch die Mitte: Diagonalen  | 86        |
| Innenleben erforschen: Fläche eines Polygons                                    | 90        |
| <b>Kapitel 6</b>  |           |
| <b><i>Eck + Eck + Eck = Dreieck</i></b>   | <b>93</b> |
| Mehr als drei Teile – Dreiecke kennen lernen                                    | 93        |
| Seiten und Winkel   | 93        |
| Das Besondere im Dreieck: Eine Menge Punkte und Linien                          | 95        |
| Grenzen ziehen – innerhalb und außerhalb eines Dreiecks                         | 99        |
| Das Innengebiet   | 99        |
| Das Außengebiet   | 100       |
| Zwischendurch für Ordnung sorgen  | 102       |
| Die Grenzen ausloten – auf der Linie  | 103       |
| Seitenweise Dreiecke  | 104       |
| Besonders kreativ: Ungleichseitige Dreiecke                                     | 104       |
| Symmetrisch werden: Gleichschenklige Dreiecke                                   | 104       |
| Wie aus dem Bilderbuch: Gleichseitige Dreiecke                                  | 106       |
| Auf einen Blick   | 108       |
| Winkelweise Dreiecke  | 109       |
| Auf die Spitze getrieben: Spitzwinklige Dreiecke                                | 109       |
| Stumpf, aber sicher nicht dumm: Stumpfwinklige Dreiecke                         | 110       |
| Gerecht verteilt: Gleichwinklige Dreiecke                                       | 111       |
| Im rechten Licht: Rechtwinklige Dreiecke  | 112       |
| Auf einen Blick   | 117       |
| Dreiecksbaustelle   | 118       |
| Flächenweise Dreiecke   | 119       |
| Zwillingsforschung: Kongruente Dreiecke   | 122       |
| Kongruente Null-acht-fünfzehn-Dreiecke  | 123       |
| Kongruente rechtwinklige Dreiecke   | 125       |
| Kongruente Dreiecke aus kongruenten Teilen                                      | 126       |
| Behaupten kann jeder – Kongruenzen beweisen                                     | 126       |

**Kapitel 7**

**Dreieck + Eck = Viereck 131**

|  |     |
|--|-----|
| Vierecke und ihre Eigenschaften                          | 131 |
| Von außen betrachtet                                     | 131 |
| Maß nehmen   | 132 |
| Parallelogramm-Parade                                    | 133 |
| Kreuz und quer: Diagonalen ins Spiel bringen             | 135 |
| Parallelogramme füllen: Flächeninhalt                    | 137 |
| Kurz und bündig: Die Eigenschaften eines Parallelogramms | 138 |
| Rechtecke lieben Ordnung                                 | 138 |
| Was ein Rechteck ausmacht                                | 138 |
| Außen herum und innen drin: Umfang und Flächeninhalt     | 141 |
| Kurz und bündig: Die Eigenschaften eines Rechtecks       | 141 |
| Rauten sind ungeschliffene Diamanten                     | 142 |
| Je größer, desto besser (gilt vor allem für Diamanten)   | 146 |
| Kurz und bündig: Die Eigenschaften einer Raute           | 147 |
| Nicht nur für Kleinkarierte: Quadrate                    | 147 |
| Die Verwendung der Diagonale                             | 149 |
| Umfang und Flächeninhalt von Quadraten                   | 149 |
| Kurz und bündig: Die Eigenschaften eines Quadrats        | 150 |
| Trapeze und ihre Kunststücke                             | 151 |
| Die Seitenhalbierende                                    | 152 |
| Die Diagonale  | 153 |
| Die Höhe   | 153 |
| Der Flächeninhalt  | 154 |
| Drachen (vierecke) steigen lassen                        | 154 |
| Gezielt arbeiten mit Pfeilvierecken                      | 155 |
| Stammbaum der Vierecke                                   | 156 |

**Kapitel 8**

**Kreisweise 159**

|  |     |
|--|-----|
| Das Thema einkreisen                                 | 159 |
| Kreise und ihr Verkehrsnetz                          | 160 |
| Reise zum Mittelpunkt des Kreises: Radius            | 160 |
| Geteilt und doch so nah: Sehne                       | 162 |
| Ab durch die Mitte: Durchmesser                      | 162 |
| Zwischenhalt Kreis: Sekante                          | 163 |
| Vorsichtige Annäherung: Tangente                     | 163 |
| Winkel gibt es überall (sogar in Kreisen)            | 167 |
| Mittelpunkts- und Umfangswinkel                      | 167 |
| Sehnen-Sehnen-Winkel                                 | 167 |
| Sehnen-Tangenten-Winkel                              | 169 |
| Sekanten und Tangenten (verschiedentlich kombiniert) | 169 |
| Darf ich vorstellen: Pi                              | 170 |

|  |     |
|--|-----|
| Bogen ohne Pfeil                                   | 172 |
| Größer oder kleiner? Alles berechenbar             | 173 |
| Auf Winkel zielen – mit Bogens Hilfe               | 175 |
| Kongruente Bogen bestimmen                         | 177 |
| Die Fläche eines Kreissektors finden               | 180 |
| Der polygame Kreis: Beziehungen in Hülle und Fülle | 181 |
| Für Insider: Inkreis                               | 181 |
| Eingekreist: Umkreis                               | 189 |
| Mitten hinein: Konzentrische Kreise                | 193 |

## **Teil IV**

### **Partei ergreifen: Ungleichungen und Ähnlichkeiten** **195**

#### **Kapitel 9**

#### **Das Leben ist ungerecht – Mit Ungleichungen klarkommen** **197**

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| Was Ungleichungen sind             | 197 |
| Déjà-vu-Axiome für Ungleichungen   | 199 |
| Ungleichungen – ziemliche Spießler | 201 |
| Dreiecksungleichungen              | 207 |
| Kreisungleichungen                 | 210 |

#### **Kapitel 10**

#### **Im richtigen Verhältnis: Ähnlichkeit** **219**

|  |     |
|--|-----|
| Verhältnisse haben – mit Zahlen            | 219 |
| Maß halten                                 | 220 |
| Geometrische Verhältnisse                  | 221 |
| Vergleiche zwischen ungleichartigen Größen | 222 |
| Kilometer mit Litern vergleichen           | 222 |
| Kilometer mit Stunden vergleichen          | 223 |
| Preis pro Einheit                          | 224 |
| Ungleichartige Größen in der Geometrie     | 224 |
| Gut proportioniert: Verhältnisgleichungen  | 224 |
| Verhältnisgleichungen und Dreiecke         | 228 |
| Kleiner Bruder: Ähnliche Polygone          | 233 |
| Ähnliche Dreiecke                          | 234 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Teil V</b>   |            |
| <b>Aufsteigen: Geometrie für Fortgeschrittene</b>                   | <b>243</b> |
| <b>Kapitel 11</b>   |            |
| <b>Schiff versenkt! (Mit Koordinaten arbeiten)</b>                  | <b>245</b> |
| Gitter ist nicht gleich Gitter: Koordinatensystem                   | 245        |
| Es gehören immer zwei dazu (Koordinaten eines Punktes)              | 247        |
| Quadranten kennen lernen  | 247        |
| Grafisch werden   | 248        |
| Entfernung ermitteln  | 250        |
| Der Mittelpunkt der Welt ... äh: zweier Koordinaten                 | 253        |
| Mit Koordinaten Flächen finden                                      | 254        |
| Zu Steigungen aufsteigen  | 257        |
| Gleichung für eine Gerade (Punktsteigungsform)                      | 261        |
| Gleichung für einen Kreis   | 264        |
| <br>  |            |
| <b>Kapitel 12</b>   |            |
| <b>Der geometrische Ort</b>   | <b>267</b> |
| Ort – Örter – Was bedeuten diese Wörter?                            | 267        |
| Geometrische Örter bestimmen  | 267        |
| Geometrische Örter im Koordinatensystem                             | 270        |
| Wenn sich geometrische Örter schneiden                              | 272        |
| Geometrische Örter beweisen   | 273        |
| <br>  |            |
| <b>Kapitel 13</b>   |            |
| <b>Trickreiche Trigonometrie</b>                                    | <b>277</b> |
| Eine kleine Wiederholung zu rechtwinkligen Dreiecken                | 277        |
| Rechtwinklige Dreiecke und Ähnlichkeit                              | 278        |
| Rechtwinklige Dreiecke, Verhältnisse und zwei ganz spezielle Winkel | 279        |
| Sinnvoller Sinus  | 280        |
| Sinus in Aktion – ein paar Beispiele                                | 280        |
| Mit trigonometrischen Tabellen arbeiten                             | 281        |
| Mit dem Taschenrechner arbeiten                                     | 282        |
| Kosinus kennen lernen   | 282        |
| Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans                             | 283        |
| Typisch Tangens   | 283        |
| Tangens in Aktion – ein paar Beispiele                              | 284        |
| Noch ein paar Verhältnisse: Kotangens, Sekans und Kosekans          | 286        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Kapitel 14</b>   |            |
| <b>Die dritte Dimension oder: Raum schaffen</b>                       | <b>289</b> |
| Polyeder – aufgeblasene Polygone                                      | 289        |
| Prisma – ein vielseitiges Polyeder                                    | 290        |
| Definition eines Prismas  | 290        |
| Prisma-Typen  | 290        |
| Fläche eines Prismas  | 291        |
| Volumen eines Prismas   | 291        |
| Ein Ausflug zu den Pyramiden  | 293        |
| Pyramiden-Typen   | 293        |
| Fläche einer Pyramide   | 294        |
| Volumen einer Pyramide  | 295        |
| Zylinder – eine runde Sache   | 295        |
| Fläche eines Zylinders  | 295        |
| Volumen eines Zylinders   | 296        |
| Kegel – Eistüten und Zaubererhüte                                     | 296        |
| Fläche eines Kegels   | 297        |
| Volumen eines Kegels  | 297        |
| Kugel – besser geht's nicht   | 297        |
| Fläche einer Kugel  | 297        |
| Volumen einer Kugel   | 298        |
| <br>  |            |
| <b>Teil VI</b>  |            |
| <b>Der Top-Ten-Teil</b>   | <b>299</b> |
| <br>  |            |
| <b>Kapitel 15</b>   |            |
| <b>Mehr als zehn Karrieren, für die man Geometrie braucht</b>         | <b>301</b> |
| Fluglotse   | 301        |
| Architekt   | 301        |
| Schreiner   | 301        |
| Modedesigner  | 302        |
| Raumgestalter   | 302        |
| Baufachleute  | 302        |
| Maschinenbauingenieur   | 302        |
| Kapitän   | 303        |
| Vermessungsingenieur  | 303        |
| Werkzeugmacher  | 303        |
| 3-D-Grafiker  | 303        |
| <br>  |            |
| <b>Kapitel 16</b>   |            |
| <b>Mehr als zehn Tipps, die Ihnen das Geometrie-Leben erleichtern</b> | <b>305</b> |
| Arbeiten Sie mit einem durchsichtigen Plastik-Geodreieck              | 305        |
| Verwenden Sie ein durchsichtiges Plastik-Lineal                       | 305        |

|   |            |
|---|------------|
| Kaufen Sie sich einen Zirkel  | 305        |
| Zeichnen Sie mit einem guten dünnen Bleistift                       | 305        |
| Besorgen Sie sich einen wissenschaftlichen Taschenrechner           | 305        |
| Notieren Sie, was Sie haben und wonach Sie suchen                   | 306        |
| Erstellen Sie eine Skizze   | 306        |
| Entwickeln Sie eine Strategie                                       | 306        |
| Arbeiten Sie die Aussagen eines Beweises durch                      | 306        |
| Assoziieren Sie geometrische Objekte mit alltäglichen Dingen        | 306        |
| Spielen Sie Poolbillard   | 307        |
| <br>  |            |
| <b>Teil VII</b>   |            |
| <b>Anhang</b>   | <b>309</b> |
| <br>  |            |
| <b>Anhang A</b>   |            |
| <b>Quadratzahlen, Quadratwurzeln und eine Trigonometrie-Tabelle</b> | <b>311</b> |
| <br>  |            |
| <b>Anhang B</b>   |            |
| <b>Wichtige Formeln im Überblick</b>                                | <b>315</b> |
| Formeln zu Winkelgrößen   | 315        |
| Winkelgrößen am Kreis   | 315        |
| Trigonometrische Formeln  | 316        |
| Formeln für den Flächeninhalt                                       | 316        |
| Beziehungen von Linien am Kreis                                     | 317        |
| Umfang und Bogen  | 318        |
| Formeln zu rechtwinkligen Dreiecken                                 | 319        |
| Formeln im Koordinatensystem  | 320        |
| Oberflächen von Polyedern   | 320        |
| Volumen-Formeln   | 321        |
| <br>  |            |
| <b>Anhang C</b>   |            |
| <b>Axiome, Sätze und was man sonst noch braucht</b>                 | <b>323</b> |
| Die Axiome  | 323        |
| Die Sätze   | 325        |
| Die Korollare   | 331        |
| Prinzipien und Regeln   | 332        |
| <br>  |            |
| <b>Anhang D</b>   |            |
| <b>Glossar</b>  | <b>333</b> |
| <br>  |            |
| <b>Stichwortverzeichnis</b>   | <b>339</b> |