

# ***Inhaltsverzeichnis***

<b><i>Einleitung</i></b>	<b>17</b>
Zu diesem Buch	17
Konventionen in diesem Buch	18
Törichte Annahmen über den Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	18
Teil I: Grundlegende lineare Algebra	19
Teil II: Viel mehr lineare Algebra	19
Teil III: Eindimensionale Analysis	19
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	20
Symbole in diesem Buch	20
Wie es weitergeht	21
<b><i>Teil I</i></b>	
<b><i>Grundlegende lineare Algebra</i></b>	<b>23</b>
<b><i>Kapitel 1</i></b>	
<b><i>Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen und Zahlen</i></b>	<b>25</b>
Aussagenlogik – die Sprache der Mathematik verstehen	25
Wörter erfinden: die Definition	26
Wörter verbinden: die Aussage	27
Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik	27
Logisch schreiben: Symbole, Symbole	29
Mengen und Relationen	29
Eine Menge Mengen	30
Verbundmengen	33
Zahlen, Zahlen, noch mehr Zahlen	33
Mit Hilfe der Logik zählen lernen	33
Die Sache mit den Schulden – Negative Zahlen	35
Die ganzen Zahlen zerbrechen – Rationale Zahlen	36
Da fehlt doch was – Reelle Zahlen	37
Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen	40
Eine Wurzel aus $-1$ : Die komplexen Zahlen entstehen	41
Rechnen mit komplexen Zahlen	43
Polarkoordinaten	45
Komplexes Potenzieren und Wurzelziehen	47
<b><i>Kapitel 2</i></b>	
<b><i>Von Vektoren und Matrizen</i></b>	<b>51</b>
Vektorräume	51
Mehr als Pfeile	52

Weitere Vektorräume entdecken	54
Vektorrechnung mit octave	56
Sind sie abhängig?	60
Eine Basis eröffnet die Dimensionen	63
Skalarprodukte und Normen: Längenmessung!	64
Lineare Abbildungen	69
Ganz einfach linear! Eine formale Definition der linearen Abbildung	70
Dies also ist der Abbildung Kern	72
Lineare Abbildungen und Spaltenvektoren	74
Mehrspaltiges: Matrizen	75
Zeilen zuerst, Spalten später	75
Matrizenräume sind Vektorräume	77
Matrixalgebra – mancherlei Matrizen multiplizieren	78
Matrizen sind – lineare Abbildungen!	84
<b>Kapitel 3</b>	
<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>87</b>
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	87
Für Schreibfaule – kurz und knapp mit Matrizen	87
Ja, geht das denn? Die Kerne kehren zurück	89
Matrizenadel: Von Zeilen- und Spaltenrang	91
Ja, das geht! Der Rang macht's möglich: Lösbarkeit	95
Determinanten bestimmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme	97
Bäumchen wechsele dich oder Permutationen	98
Igit! Determinanten	101
Nicht gar so eklig: Rekursiv geht's gut!	102
Rechnen mit Determinanten und nochmal: Lösbarkeit von Gleichungssystemen	106
Inverse Matrix – Kehrwerte bei Matrizen	108
Gauß-Algorithmus: Im Halbschlaf Gleichungssysteme lösen	113
Gestaffelt ist's einfach – Rückwärtslösen	113
Endlich konkret: das Eliminationsverfahren	115
Abhängige Spalten, was nun?	120
Aufwand für Gauß und Cramer	122
Nicht nur einzelne Gleichungssysteme: Berechnung der Inversen	123
<b>Teil II</b>	
<b>Viel mehr lineare Algebra</b>	<b>129</b>
<b>Kapitel 4</b>	
<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>131</b>
Das Eigenwertproblem – kein Minderwertigkeitskomplex	131
Ganz charakteristisch, die Gleichung	133
Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms	134

Ganz allein meine! Berechnung der Eigenvektoren	136
Einige Eigenschaften von Eigenwerten	139
Ein Platz für die Eigenvektoren: der Eigenraum	141
Eigenwerte von Dreiecks- und Diagonalmatrizen	144
Ähnliche Matrizen	145
Diagonalähnliche Matrizen	146
Symmetrische und hermitesche Matrizen	147
Symmetrische Matrizen	149
Orthonormierte Eigenvektoren	152
Orthogonalmatrizen	152
Symmetrische und orthogonale Matrizen	155
<b>Kapitel 5</b>	
<b>Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung</b>	<b>157</b>
Ellipsengleichungen und quadratische Formen	157
Basiswechsel	160
Hauptachsentransformation	161
Der Physik auf der Spur: Lineare Ausgleichsrechnung	163
Orthogonalität	165
Orthogonalprojektion	166
Ausgleichsrechnung praktisch	167
<b>Kapitel 6</b>	
<b>Ein wenig Dreidimensionales</b>	<b>173</b>
Nicht nur für Piloten: Orientierung in 3D	173
Oben und unten – Ebenen unterteilen den Raum	173
Das Vektorprodukt	176
<b>Teil III</b>	
<b>Eindimensionale Analysis</b>	<b>183</b>
<b>Kapitel 7</b>	
<b>Folgen und Grenzwerte</b>	<b>185</b>
Räume mit Abstand	185
Topologie: die Frage nach den nachbarschaftlichen Beziehungen	185
Rand- und innere Punkte	189
Häufungspunkte	191
Folgen	195
Grenzwerte von Folgen	197
Cauchy-Folgen	199
Auf dem Weg zur Analysis: Reelle Zahlenfolgen	202
Mit den Folgen rechnen	203

<b>Kapitel 8</b>	
<b>Stetigkeit</b>	<b>209</b>
Grenzwerte reellwertiger Funktionen	209
Rechenregeln für Grenzwerte einer Funktion	212
Springen oder nicht springen: Stetigkeit	214
Ohne abzusetzen oder $\epsilon - \delta$ : Stetigkeitsdefinitionen	215
Rechenregeln für stetige Funktionen	216
Eigenschaften stetiger Funktionen	217
<b>Kapitel 9</b>	
<b>Differentialrechnung</b>	<b>221</b>
Die Ableitung	221
Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten	221
Und geometrisch ist das auch!	224
Vorsicht: Nicht knicken! Differenzieren und Stetigkeit	226
Die Ableitung regeln	228
Ableitungsketten – verschachtelte Funktionen	231
Haufenweise Beispiele zur Kettenregel	233
Ableitung von Umkehrfunktionen	237
Wiederholtes Differenzieren: Höhere Ableitungen	239
Play it again, Sam! Ableitungen ableiten	239
Funktionen vom Feinsten – stetige Differenzierbarkeit	241
Ganz oben und ganz unten – Maxima und Minima	243
Globale und lokale Extremstellen	243
Bestimmung von Extremstellen	244
Der Mittelwertsatz – gerade mit krumm vergleichen	247
Ein Extremum muss sein: der Satz von Rolle	247
Schief geht es auch: der Mittelwertsatz	248
Grenzwerte ableiten und die Regeln von de l’Hospital	250
Kurvendiskussion	254
<b>Kapitel 10</b>	
<b>Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale</b>	<b>263</b>
Ein bestimmtes Integral	263
Krummlinige Flächen berechnen	263
Einfache Rechenregeln für bestimmte Integrale	269
Und jetzt umgekehrt: Stammfunktionen	272
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	272
Das unbestimmte Integral	275
Alle meine Stammfunktionen	275
Nicht auf Sand gebaut: Grundintegrale	278
Was ist eigentlich ein uneigentliches Integral?	279
Die Sache mit den Randpunkten	279
Und wieder einmal: Grenzwerte	280
Vergleichskriterien	282

Parameterintegrale	285
Eigenschaften eigentlicher Parameterintegrale	286
Variable Integrationsgrenzen	288
Uneigentliche Parameterintegrale	289
<b>Kapitel 11</b>	
<b><i>Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst!</i></b>	<b>291</b>
Scheibchenweise integrieren: Partielle Integration	291
Hier hilft die Produktregel	291
Unbestimmt: Partielle Integration zur Bestimmung von Stammfunktionen	292
Und bestimmt! Partielle Integration bei bestimmten Integralen	295
Die Schwierigkeiten verstecken: Substitution	296
Hin- und hersubstituieren	298
Sinus- und Kosinusintegrale	299
Und noch eine Variante der Substitution	301
Partialbruchzerlegung – Integrale rationaler Funktionen	304
Zerlegung in einfache Brüche	305
Zwei Sorten Partialbrüche bleiben übrig	305
Partialbruchzerlegung bei unbestimmter Integration	311
<b>Kapitel 12</b>	
<b><i>Reihen</i></b>	<b>315</b>
Immer längere Summen: Unendliche Reihen	315
Bausteine stapeln oder Schildkrötenrennen	316
Alternierende Reihen: Schritt vor, Schritt zurück	322
Absolute Konvergenz? Unbedingt!	323
Wann konvergiert's? – Cauchy, Leibniz und Co	326
Potenzreihen	331
Potenzreihen oder unendlich lange Polynome	332
Wo konvergiert's denn?	333
Was ist das denn? Eine Funktion!	336
Differentiation und Integration von Potenzreihen – Stück für Stück	341
Taylorreihen	343
Funktionen ertasten: Approximation durch Polynome	344
Den Spieß umdrehen – Funktionen als Reihe	345
Des Schneiders Trickkiste: Taylorentwicklung für Dummies	351
<b>Teil IV</b>	
<b><i>Der Top-Ten-Teil</i></b>	<b>355</b>
<b>Kapitel 13</b>	
<b><i>Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra</i></b>	<b>357</b>
Don't: Den Imaginärteil mit dem imaginären Anteil verwechseln	357

Do: Bruchrechnen in Normalform und für Potenzen und Wurzeln die Polardarstellung verwenden	357
Don't: Beim komplexen Wurzelziehen zu viele oder zu wenige Wurzeln erhalten	358
Don't: Lineare Gleichungssysteme wie in der Schule lösen	358
Do: Das Gauß-Verfahren verwenden	358
Don't: Zu viele Schritte auf einmal machen	358
Do: Die einzelnen Schritte dazuschreiben	359
Don't: Lösungen vergessen	359
Do: Die Gleichungen und Unbekannten geschickt sortieren	359
Don't: Den Nullvektor zum Eigenvektor erklären	359

### ***Kapitel 14***

#### ***Zehn wichtige Punkte in der Analysis*** **361**

Besorgen Sie sich eine Formelsammlung!	361
Folgen sind keine richtigen Mengen!	361
Verwenden Sie die Grenzwertrechenregeln nie ungeprüft!	362
Kein Bild sagt mehr als tausend Worte!	362
Das Ableiten können Sie einfach lernen!	362
Integrieren müssen Sie immer wieder üben!	362
Potenzreihen sind Reihen!	362
Vergessen Sie die Randpunkte des Konvergenzintervalls nicht!	363
Schreiben Sie Ihre Rechnungen sauber auf!	363

### ***Kapitel 15***

#### ***Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt*** **365**

Mathematik und Psychologie	365
Warum Mathematiker eine seltsame Sprache sprechen	365
Nicht locker lassen!	366
Was tun, wenn Sie mal gefehlt haben?	366
Der Unterschied zwischen einer Mathematikvorlesung und einer Theatervorstellung	367
Glauben Sie nichts!	367
Üben Sie! Üben Sie!	368
Die richtige Wahl einer Übungsgruppe	368
Üben Sie nicht allein!	368

#### ***Stichwortverzeichnis*** **369**