Willkommen in der Welt der Differentialgleichungen!

1

In diesem Kapitel...

- Die Grundlagen der Differentialgleichungen kennen lernen
- Das Wichtigste über Ableitungen erfahren
- Richtungsfelder ausprobieren
- Differentialgleichungen in unterschiedliche Kategorien einordnen
- Zwischen unterschiedlichen Ordnungen von Differentialgleichungen unterscheiden
- Fortgeschrittene Methoden beobachten

Ein spannender Moment im Physiklabor. Das internationale Team hochdotierter Physiker hat ein Gewicht an eine Feder gehängt. Das Gewicht wippt auf und ab.

»Was passiert?«, rufen die Physiker aufgeregt. »Wir müssen diesen Vorgang mit Hilfe der Mathematik ausdrücken! Wir brauchen eine Formel, die die Bewegung des Gewichts beschreibt!«

Sie, der weltweit anerkannte Fachmann für Differentialgleichungen, greifen in aller Gelassenheit in die aufgeregte Diskussion ein. »Kein Problem«, sagen Sie. »Ich kann eine Formel für Sie ableiten, die die hier beobachtete Bewegung beschreibt. Aber das wird Sie einiges kosten.«

Die Physiker sehen Sie besorgt an. »Wie viel?«, fragen sie und überprüfen ihre Spenden und Finanzierungsquellen.

»Gut, wir zahlen alles«, winseln sie. »Nur geben Sie uns die Formel!«

Sie ziehen Ihren Notizblock heraus und fangen an zu schreiben.

»Was ist das?«, fragt einer der Physiker und zeigt auf Ihre Berechnungen.

»Das«, sagen Sie, »ist eine Differentialgleichung. Ich muss sie nur noch lösen, dann haben Sie Ihre Formel.« Der Physiker sieht Ihnen aufmerksam zu, während Sie in Lichtgeschwindigkeit rechnen.

»Fertig!«, verkünden Sie. »Ihre Formel lautet $y = 10 \sin(5t)$, wobei y die vertikale Position des Gewichts und t die Zeit in Sekunden darstellen.«

»Genial!«, rufen die Physiker. »Und das haben Sie durch Lösung einer Differentialgleichung herausgefunden?«

»Genau!«, sagen Sie. »Zur Kasse bitte, die Herren.«

Vielleicht sind Sie kein weltweit anerkannter Fachmann für Differentialgleichungen – zumindest noch nicht. Aber mit Hilfe dieses Buches könnten Sie sehr leicht zu einem solchen werden. In diesem Kapitel vermittle ich Ihnen die Grundlagen für Ihre Arbeit mit Differentialgleichungen. Es geht um Dinge wie Ableitungen, Richtungsfelder und die Einordnung von Gleichungen.

Das Wesen der Differentialgleichungen

Im Wesentlichen verwenden Differentialgleichungen *Ableitungen*, die beschreiben, wie sich eine Größe ändert. Durch die Lösung der Differentialgleichung erhalten Sie eine Formel für die eigentliche Größe, in der keine Ableitungen vorkommen.

Weil Ableitungen so wichtig für Differentialgleichungen sind, werde ich Sie im nächsten Abschnitt noch einmal darauf einschwören. (Falls Sie bereits Experte in Sachen Ableitungen sind, können Sie zum nächsten Abschnitt weiterblättern.) Hier werde ich Ihnen aber zunächst ein qualitatives Beispiel zeigen, um Ihnen einen einfachen Einstieg zu ermöglichen.

Angenommen, Sie sind ein langjähriger Kunde in Ihrem örtlichen Lebensmittelgeschäft, und Sie haben bemerkt, dass die Preise mit der Zeit gestiegen sind. Sie haben die folgende Tabelle angelegt, die den Preis für ein Glas Essiggurken verfolgt:

Monat	**Preis**
1	2,40 €
2	2,50 €
3	2,60 €
4	2,70 €
5	2,80 €
6	2,90 €

Es sieht so aus, als hätten die Preise stetig zugenommen, wie in dem Graphen für die Preise in Abbildung 1.1 gezeigt. Wie viel kosten die Essiggurken in einem Jahr, wenn die Preiserhöhung mit dieser Geschwindigkeit weitergeht?

Sie wissen, dass die Steigung einer Linie gleich $\Delta y/\Delta x$ ist (d.h. die Änderung in y dividiert durch die Änderung in x). Hier verwenden Sie die Symbole Δp für die Änderung des Preises und Δt für die Änderung der Zeit. Die Steigung der Linie in Abbildung 1.1 ist also $\Delta p/\Delta t$.

Weil der Preis für Essiggurken jeden Monat um 10 Cent steigt, kennen Sie die Steigung der Linie in Abbildung 1.1:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 10 \quad ct/Monat$$

Die Steigung einer Linie ist eine Konstante, die die Änderungsgeschwindigkeit der Linie angibt. Die Ableitung einer Größe ergibt ebenfalls ihre Änderungsgeschwindigkeit an einem beliebigen Punkt, so dass Sie sich die Ableitung als die Steigung an einem bestimmten

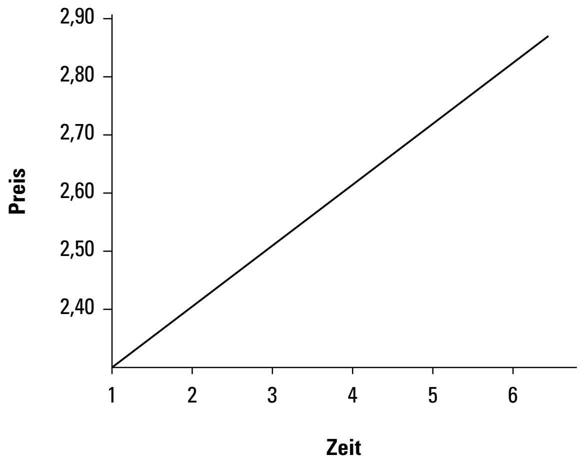


Abbildung 1.1: Der Preis für Essiggurken nach Monaten.

Punkt vorstellen können. Weil die Änderungsgeschwindigkeit einer Linie konstant ist, können Sie schreiben:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 10 \;\; ct/Monat$$

In diesem Fall ist *dp/dt* die Ableitung des Preises für Essiggurken in Bezug auf die Zeit. (Wenn Sie das Symbol *d* sehen, erkennen Sie, dass es sich um eine Ableitung handelt.)

Und damit erhalten Sie diese Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{dt} = 10 \;\; ct/Monat$$

Die obige Gleichung ist eine Differentialgleichung, weil es sich um eine Gleichung handelt, die eine Ableitung beinhaltet, in diesem Fall *dp/dt*. Es ist eine relativ einfache Differentialgleichung, und Sie können wie folgt nach dem Preis als Funktion der Zeit auflösen:

$$p = 10t + c$$

Bei dieser Gleichung ist p der Preis (angegeben in Cent), t ist die Zeit (angegeben in Monaten), und c ist eine beliebige Konstante, die Sie einsetzen, um die Anfangsbedingung der Aufgabe darzustellen. (Sie brauchen eine Konstante c, denn wenn Sie die Ableitung von $10t + c$ bestimmen, erhalten Sie einfach nur 10, so dass Sie nicht erkennen können, ob es eine Konstante gibt, die zu $10t$ addiert werden soll – Sie erkennen das anhand des Vergleichs mit den Anfangsbedingungen.)

Das fehlende Verbindungsglied ist der Wert von c. Sie setzen deshalb einfach die Zahlen ein, die Ihnen für Preis und Zeit vorliegen, um danach aufzulösen. Beispielsweise beträgt der Preis für die Essiggurken im 1. Monat 2,40 €, Sie können also nach c auflösen, indem Sie für

t den Wert 1 und für p den Wert 2,40 € einsetzen (240 Cent). Damit erhalten Sie:

$$240 = 10 + c$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhalten Sie $c = 230$, die Lösung für Ihre Differentialgleichung lautet also:

$$p = 10t + 230$$

Und das ist Ihre Lösung – das heißt, der Preis für Essiggurken pro Monat. Sie haben mit einer Differentialgleichung begonnen, die die Änderungsgeschwindigkeit für den Preis von Essiggurken angegeben hat, und haben dann diese Differentialgleichung aufgelöst, um den Preis als Funktion der Zeit zu erhalten, $p = 10t + 230$.

Jetzt wollen Sie natürlich sehen, ob Ihre Differentialgleichung funktioniert! Probieren wir es aus! Stellen Sie fest, wie hoch der Preis für Essiggurken im 12. Monat sein wird. Nachdem Sie die Gleichung besitzen, ist das ganz einfach herauszufinden:

$$p = 10t + 230$$

$$10 \cdot 12 + 230 = 350$$

Wie Sie sehen, werden die Essiggurken im 12. Monat stolze 3,50 € kosten. Das konnten Sie herausfinden, weil Sie die Geschwindigkeit kannten, mit der der Preis steigt. Und das ist die Arbeitsweise einer typischen Differentialgleichung. Sie haben eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit, mit der sich eine bestimmte Größe ändert (in diesem Fall der Preis), und Sie können diese Differentialgleichung auflösen, um eine weitere Gleichung zu erhalten, die dann den Preis mit der Zeit in Verbindung bringt.

Beachten Sie, dass sich für dp/dt beim Einsetzen der Lösung ($p = 10t + 230$) in die Differentialgleichung tatsächlich 10 Cent pro Monat ergeben, genau so, wie es sein soll.

Ableitungen: Die Grundlage der Differentialgleichungen

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, gibt eine Ableitung einfach die Geschwindigkeit an, mit der sich eine Größe ändert. Mathematisch ausgedrückt, beschreibt die Ableitung einer Funktion f, dargestellt als df/dx oder (wie in diesem Buch häufiger) als f', wie sich f für jeden Wert von x ändert. Die Funktion f muss an einem Punkt stetig sein, damit an diesem Punkt eine Ableitung existiert.

Dieses Konzept betrachten wir jetzt genauer. Der Betrag von f ändert sich um eine kleine Distanz entlang der x-Achse. Δx ist:

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich $f(x)$ mit der Änderung von Δx ändert, ist:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

So weit, so gut. Um die Ableitung dy/dx zu erhalten, wobei $y = f(x)$ ist, müssen Sie Δx sehr klein werden lassen, so dass es gegen Null geht. Dies können Sie mit einem *Grenzwertausdruck* realisieren, der auswertbar ist, wenn Δx gegen Null geht. In diesem Fall lautet der Grenzwertausdruck:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Mit anderen Worten, die Ableitung von $f(x)$ ist der Betrag, um den sich $f(x)$ für Δx ändert, dividiert durch Δx, wenn Δx gegen Null geht.

Ich werde in den folgenden Abschnitten einige gebräuchliche Ableitungen vorstellen. Diesen Ableitungen werden Sie im gesamten Buch immer wieder begegnen.

Ableitungen, die Konstanten sind

Der erste Ableitungstyp, dem Sie begegnen, ist der Fall, in dem $f(x)$ gleich einer Konstanten ist, c. Wenn $f(x) = c$, dann ist auch $f(x + \Delta x) = c$, und $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ (weil alle Beträge letztlich gleich sind), damit ist $df(x)/dx = 0$. Aus diesem Grund gilt:

$$f(x) = c \qquad \frac{df(x)}{dx} = 0$$

Was ist, wenn $f(x) = cx$, wobei c eine Konstante ist? In diesem Fall ist $f(x) = cx$ und $f(x + \Delta x) = cx + c\Delta x$.

Damit ist $f(x + \Delta x) - f(x) = c\Delta x$ und $(f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x = c$. Damit gilt:

$$f(x) = cx \qquad \frac{df(x)}{dx} = c$$

Ableitungen, die Potenzen sind

Bei einem weiteren häufigen Ableitungstyp wird x in die Potenz n erhoben. Ableitungen mit Potenzen funktionieren wie folgt:

$$f(x) = x^n \qquad \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1}$$

Bei der Arbeit mit Differentialgleichungen kommt es häufig vor, dass e in eine bestimmte Potenz erhoben wird. (e ist die Basis des natürlichen Logarithmus, $e = 2{,}7128\ldots$, und a ist eine Konstante.)

$$f(x) = e^{ax} \qquad \frac{df(x)}{dx} = ae^{ax}$$

Außerdem gibt es die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, nämlich die Logarithmusfunktion, die sich wie folgt verhält:

$$f(x) = \ln(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ableitung mit Trigonometrie

Und jetzt ein bisschen Trigonometrie, beginnend mit der Ableitung von sin(x):

$$f(x) = \sin(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} = \cos(x)$$

Und hier die Ableitung von cos(x):

$$f(x) = \cos(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} = -\sin(x)$$

Ableitungen mit mehreren Funktionen

Die Ableitung der Summe (oder Differenz) von zwei Funktionen ist gleich der Summe (oder Differenz) der Ableitungen der Funktionen (das ist ganz einfach zu merken!):

$$f(x) = a(x) \pm b(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{da(x)}{dx} \pm \frac{db(x)}{dx}$$

Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen ist gleich der ersten Funktion multipliziert mit der Ableitung der zweiten Funktion plus der zweiten Funktion multipliziert mit der Ableitung der ersten Funktion. Beispiel:

$$f(x) = a(x)b(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} = a(x)\frac{db(x)}{dx} + b(x)\frac{da(x)}{dx}$$

Und was ist mit der Ableitung des Quotienten von zwei Funktionen? Diese Ableitung ist gleich der Funktion im Nenner multipliziert mit der Ableitung der Funktion im Zähler minus der Funktion im Zähler multipliziert mit der Ableitung der Funktion im Nenner, alles dividiert durch das Quadrat der Funktion im Nenner:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{b(x)\frac{da(x)}{dx} - a(x)\frac{db(x)}{dx}}{b(x)^2}$$

Das große Ganze mit Hilfe der Richtungsfelder erkennen

Man verliert sich nur zu leicht in den mathematischen Details einer Differentialgleichung und vernachlässigt dabei die Vorstellung vom Gesamtbild. Ein praktisches Werkzeug, mit dem Sie sich einen Überblick über Differentialgleichungen verschaffen, sind Richtungsfelder, um die es in Kapitel 2 detaillierter gehen wird. Richtungsfelder sind praktisch, um sich Differentialgleichungen der folgenden Form besser vorstellen zu können:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Die obige Gleichung gibt die Steigung der Gleichung $y = f(x)$ an einem beliebigen Punkt x an. Ein Richtungsfeld kann helfen, sich eine solche Gleichung vorzustellen, ohne dass man nach der Lösung auflösen muss. Dieses Feld ist ein zweidimensionaler Graph, der aus vielen, manchmal Hunderten, kurzen Liniensegmenten besteht, die die Steigung – d.h. den Wert der Ableitung – an mehreren Punkten zeigen. In den folgenden Abschnitten erkläre ich Ihnen den Prozess, Richtungsfelder zu zeichnen und zu verstehen.

Ein Richtungsfeld zeichnen

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, wie ein Richtungsfeld aussieht. Auf einen durch die Luft fallenden Körper wirkt die folgende Kraft:

$$F = mg - \gamma v$$

In dieser Gleichung ist F die Nettokraft auf das Objekt, m ist die Masse des Objekts, g ist die Beschleunigung durch die Schwerkraft (g = 9,8 m/s^2 in der Nähe der Erdoberfläche), γ ist der *Luftwiderstandsbeiwert* (der den Effekt des Luftwiderstands darstellt und in Ns/m gemessen wird), und v ist die Geschwindigkeit des Objekts, wenn es durch die Luft fällt.

Wenn Sie nicht mit der Physik vertraut sind, denken Sie an das zweite Gesetz von Newton. Es besagt, dass $F = ma$, wobei F die auf ein Objekt wirkende Nettokraft ist, m die Masse und a die Beschleunigung. Aber die Beschleunigung eines Objekts ist auch dv/dt, die Ableitung der Geschwindigkeit des Objekts nach der Zeit (d.h. die Änderungsgeschwindigkeit der Objektgeschwindigkeit). Insgesamt erhalten Sie damit:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

Jetzt sind Sie zurück auf dem Territorium der Differentialgleichungen, mit der folgenden Differentialgleichung für die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$$

Jetzt können Sie spezifisch werden, indem Sie ein paar Zahlen einsetzen. Die Beschleunigung durch Schwerkraft beträgt 9,8 m/s^2 in der Nähe der Erdoberfläche, wir wollen von einem Luftwiderstandsbeiwert von 1,0 Ns/m ausgehen und das Objekt hat eine Masse von 4,0 kg. Und hier die Formel:

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{4}$$

Um sich diese Gleichung besser vorstellen zu können, ohne sie zu lösen, können Sie sie als Richtungsfeld darstellen. Dazu legen Sie eine zweidimensionale Zeichnung an und tragen Dutzende kurzer Liniensegmente ein, die die Steigung an diesen Stellen angeben (das können Sie manuell oder mittels einer Software machen). Das Richtungsfeld für diese Gleichung ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Wie Sie in der Abbildung erkennen, gibt es Dutzende kurzer Linien im Graphen, die jeweils die Steigung der Lösung an diesem Punkt darstellen. Die vertikale Achse ist v, die horizontale Achse ist t.

Weil die Steigung der Lösungsfunktion an jeder Stelle nicht von t abhängig ist, sind die Steigungen entlang jeder horizontalen Linie gleich.

Verbindung von Steigungen zu einer Integralkurve

Sie können sich visuell verdeutlichen, was mit den Lösungen einer Differentialgleichung passiert, indem Sie sich das Richtungsfeld ansehen. Wie? All diese winzigen Liniensegmente zeigen Ihnen die Lösungen der Differentialgleichungen – Sie brauchen nur noch Linien zu zeichnen, die die Steigungen verbinden. Eine solche Lösung ist in Abbildung 1.3 gezeigt. Eine Lösung wie die in dieser Abbildung dargestellte, wird als *Integralkurve* der Differentialgleichung bezeichnet.

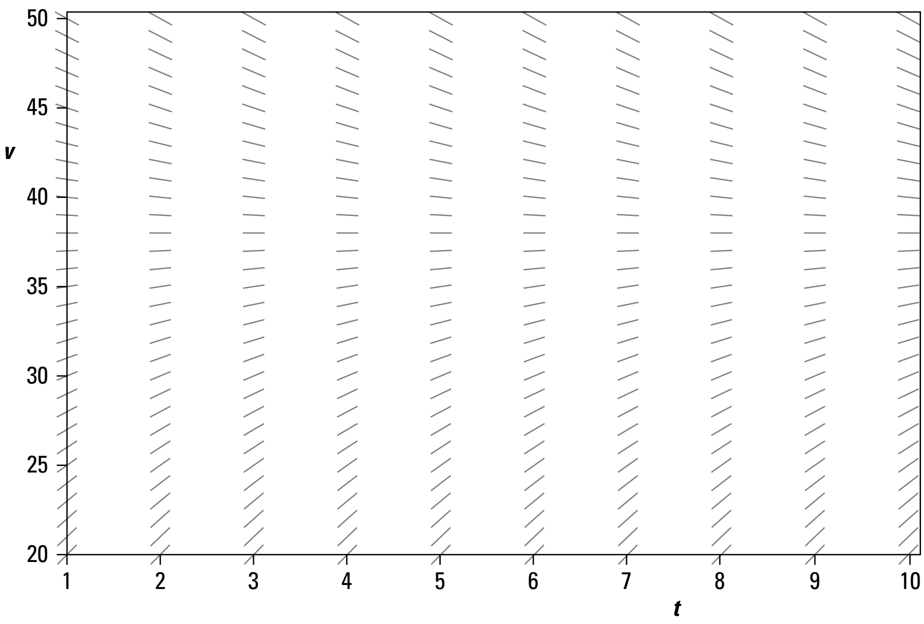


Abbildung 1.2: Ein Richtungsfeld.

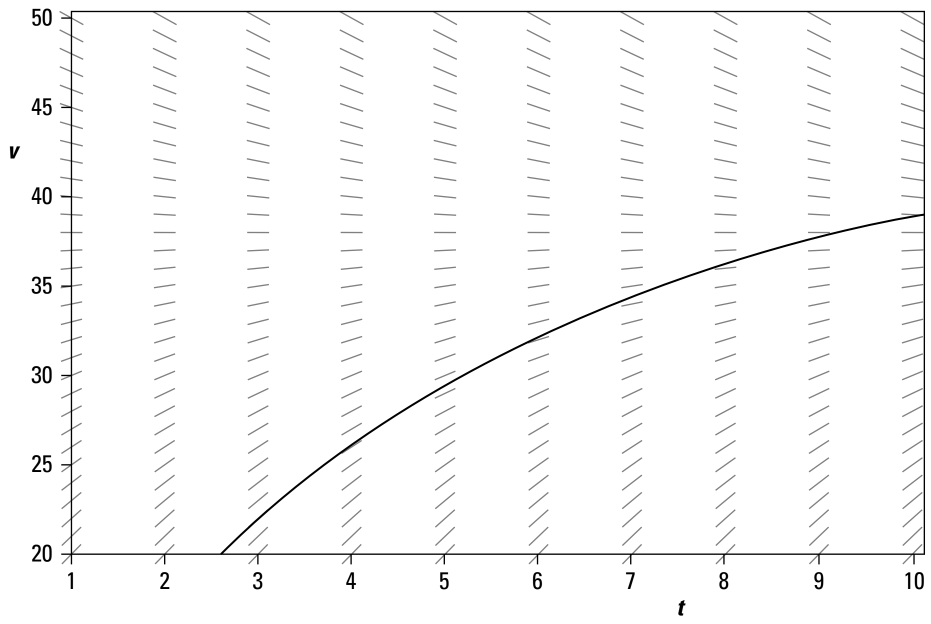


Abbildung 1.3: Eine Lösung in einem Richtungsfeld.

Erkennen des Gleichgewichtswerts

Wie Sie in Abbildung 1.3 erkennen, gibt es für die Gleichung, die Sie zu lösen versuchen, viele Lösungen. Zufällig ist die tatsächliche Lösung für diese Differentialgleichung gleich:

$$v = 39{,}2 + ce^{-t/4}$$

In der obigen Lösung ist c eine beliebige Konstante, die jeden Wert annehmen kann. Das bedeutet, es gibt unendlich viele Lösungen für die Differentialgleichung.

Aber Sie müssen diese Lösung nicht kennen, um feststellen zu können, wie sich die Lösungen verhalten. Sie können durch Betrachtung des Richtungsfelds erkennen, dass alle Lösungen gegen einen bestimmten Wert tendieren, den so genannten *Gleichgewichtswert*. Beispielsweise erkennen Sie aus dem Richtungsfeldgrafen aus Abbildung 1.3, dass der Gleichgewichtswert gleich 39,2 ist. Und Sie erkennen diesen Gleichgewichtswert auch in Abbildung 1.4.

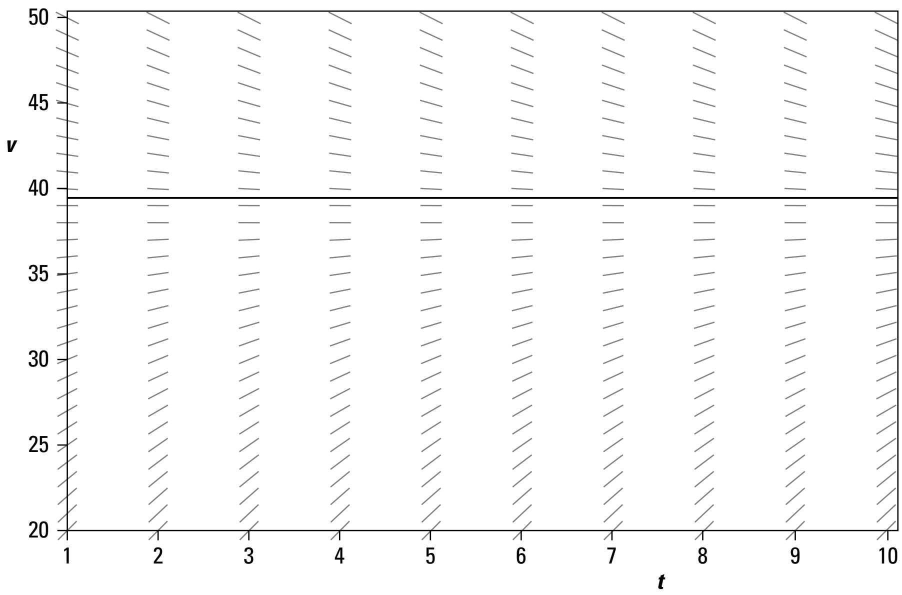
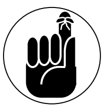


Abbildung 1.4: Ein Gleichgewichtswert in einem Richtungsfeld.

Differentialgleichungen klassifizieren

In der Welt der Mathematik und der Wissenschaft gibt es unzählige Differentialgleichungen, und man unterscheidet sie nach ihrem jeweiligen Typ. Aus diesem Grund gibt es verschiedene *Klassifizierungen*, denen Sie die Differentialgleichungen zuordnen können. Ich werde sie in den folgenden Abschnitten genauer erklären.

Klassifizierung der Gleichungen der Ordnung nach



Die gebräuchlichste Klassifizierung von Differentialgleichungen basiert auf ihrer *Ordnung*. Die Ordnung einer Differentialgleichung ist einfach die Ordnung ihrer höchsten Ableitung. Betrachten Sie beispielsweise die folgende Differentialgleichung, die die erste Ordnung hat:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

Hier ein Beispiel für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 19x + 4$$

So geht es weiter bis zur n-ten Ordnung:

$$9\frac{d^ny}{dx^n} - 16\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + 14\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} - 19x + 4 = 0$$

Wie Sie sich vielleicht vorstellen können, sind Differentialgleichungen erster Ordnung in der Regel am leichtesten zu bearbeiten, gefolgt von Differentialgleichungen zweiter Ordnung usw. Ich werde die Differentialgleichungen erster, zweiter und höherer Ordnung später in diesem Kapitel genauer beschreiben.

Klassifizierung als gewöhnliche und partielle Gleichungen

Sie können Differentialgleichungen auch als *gewöhnliche* oder *partielle* Gleichungen klassifizieren. Diese Einordnung ist davon abhängig, ob gewöhnliche oder partielle Ableitungen beteiligt sind.

Eine *gewöhnliche* (*nicht partielle*) *Ableitung* ist eine vollständige Ableitung, wie etwa dQ/dt, wobei Sie die Ableitung aller Terme in Q in Bezug auf t erstellen. Es folgt ein Beispiel für eine gewöhnliche Differentialgleichung, die die Last $Q(t)$ in einem Schaltkreis mit der elektromotorischen Kraft $E(t)$ in Beziehung bringt (d.h. die an den Schaltkreis angeschlossene Spannungsquelle).

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

Hier ist Q die Last, L ist die Induktivität des Schaltkreises, C ist die elektrische Kapazität des Schaltkreises, und $E(t)$ ist die elektromotorische Kraft (Spannung), die auf den Schaltkreis angewendet wird. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, weil nur gewöhnliche Ableitungen auftreten.

Andererseits werden partielle Ableitungen in Hinblick auf nur eine Variable erstellt, obwohl die Funktion von zwei oder mehr Variablen abhängig ist. Es folgt ein Beispiel für eine partielle Differentialgleichung (achten Sie auf die seltsame Darstellung von d):

$$\alpha^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

In dieser Wärmeleitungsgleichung ist α eine physische Konstante des Systems, dessen Wärmefluss Sie bestimmen wollen, und $u(x, t)$ ist die tatsächliche Wärme.

Beachten Sie, dass $u(x, t)$ sowohl von x als auch von t abhängig ist, und dass beide Ableitungen partielle Ableitungen sind – d.h. die Ableitungen werden in Hinblick auf x oder auf t erstellt, aber nicht für beide.

In diesem Buch konzentriere ich mich auf gewöhnliche Differentialgleichungen, weil partielle Differentialgleichungen in der Regel Thema von Büchern für Fortgeschrittene sind. Aber keine Angst: ich werde Ihnen ausreichend viel über partielle Differentialgleichungen beibringen.

Klassifizierung als lineare oder nicht lineare Gleichungen

Eine andere Möglichkeit, Differentialgleichungen zu klassifizieren, ist die Einordnung als *linear* oder *nicht-linear*. Sie bezeichnen eine Differentialgleichung als linear, wenn sie nur lineare Terme von y, y', y'' und bis zu $y^{(n)}$ beinhaltet (d.h. Terme mit der Potenz 1). Die folgende Gleichung beispielsweise ist eine lineare Differentialgleichung:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

Beachten Sie, dass diese Art Differentialgleichung im gesamten Buch in der Regel auf diese Weise dargestellt wird. Und die folgende Form verdeutlicht die lineare Art dieser Gleichung:

$$LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

Nicht lineare Differentialgleichungen andererseits beinhalten nicht lineare Terme in y, y', y'' bis zu $y^{(n)}$. Die folgende Gleichung, die den Winkel eines Pendels beschreibt, ist eine nicht lineare Gleichung, die den Term sin θ (nicht nur θ) beinhaltet:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin(\theta)=0$$

Die Arbeit mit nicht linearen Differentialgleichungen ist im Allgemeinen schwieriger als die Arbeit mit linearen Differentialgleichungen. Schließlich ist es häufig schwierig genug, lineare Differentialgleichungen zu lösen, ohne dass man es mit höheren Potenzen und anderen nicht linearen Termen zu tun hat. Aus diesem Grund schummeln die Wissenschaftler häufig, wenn sie es mit nicht linearen Gleichungen zu tun haben. In der Regel erstellen sie eine Annäherung, die die nicht lineare Gleichung auf eine lineare reduziert.

Wenn es beispielsweise um Pendel geht, können Sie sagen, dass für kleine Winkel gilt $\sin(\theta) \approx \theta$. Das bedeutet, die folgende Gleichung ist die Standardform der Pendelgleichung, die Sie im Physiklehrbuch finden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$$

Wie Sie sehen, handelt es sich bei dieser Gleichung um eine lineare Differentialgleichung, und als solche ist sie sehr viel einfacher zu bearbeiten. Natürlich ist es geschummelt, nur kleine Winkel zu verwenden, so dass gilt $\sin(\theta) \approx \theta$, aber andernfalls sind Sie womöglich darauf eingeschränkt, numerische Berechnungen auf einem Computer auszuführen, um nicht lineare Differentialgleichungen zu lösen; offensichtlich funktionieren diese Berechnungen, aber es ist sehr viel weniger befriedigend, als die Gleichung selbst zu knacken (wenn Sie ein Mathematik-Freak sind, wie ich einer bin).

Differentialgleichungen erster Ordnung lösen

In den Kapiteln 2, 3 und 4 wird es um Differentialgleichungen der Form $f'(x) = f(x, y)$ gehen. Diese Gleichungen werden auch als Differentialgleichungen erster Ordnung bezeichnet, weil die daran beteiligte Ableitung von der ersten Ordnung ist (weitere Informationen über diese Art Gleichungen finden Sie im früheren Abschnitt »Klassifizierung der Gleichungen der Ordnung nach«).

Differentialgleichungen der ersten Ordnung sind toll, weil sie größtenteils lösbar sind. Ich werde Ihnen in den Kapiteln 2, 3 und 4 alle Möglichkeiten zeigen, Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Nachfolgend einige Beispiele, was Sie erwartet:

- ✔ Wie Sie wissen, sehen Differentialgleichungen erster Ordnung wie folgt aus: $f'(x) = f(x, y)$. In den folgenden Kapiteln werde ich Ihnen zeigen, wie Sie mit dem Fall umgehen, wo $f(x, y)$ linear in x ist – z.B. $f'(x) = 5x$ –, und dann den Fall, wo es nicht linear in x ist, wie in $f'(x) = 5x^2$.
- ✔ Sie werden erfahren, wie mit separierbaren Gleichungen umzugehen ist, wo alle Terme mit y auf eine Seite der Gleichung und alle Terme mit x auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden können.
- ✔ Außerdem helfe ich Ihnen, Differentialgleichungen erster Ordnung ganz lässig zu lösen, indem Sie beispielsweise Integrationsfaktoren ermitteln, so dass schwierige Aufgaben ganz einfach werden.

Richtungsfelder, die ich in diesem Kapitel bereits angesprochen habe, funktionieren nur für Gleichungen des Typs $f'(x) = f(x, y)$, d.h. in denen nur die erste Ableitung vorkommt, weil die erste Ableitung von $f(x)$ die Steigung von $f(x)$ an jedem beliebigen Punkt angibt (und letztlich geht es bei Richtungsfeldern genau darum, die Liniensegmente für die Steigung zu verbinden).

Die Arbeit mit Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung

Wie im Abschnitt »Klassifizierung von Gleichungen nach der Ordnung« bereits erwähnt, beinhalten Differentialgleichungen zweiter Ordnung nur die zweite Ableitung, d^2y/dx^2, auch als y'' bezeichnet. In vielen für die Physik wichtigen Situationen befinden sich die Differentialgleichungen zweiter Ordnung genau dort, wo es zur Sache geht.

Beispielsweise können Sie damit Situationen aus der Physik nachvollziehen, wie etwa Massen an Federn oder die elektrischen Schwingungen von Spulen/Kondensator-Schaltkreisen. Dazu verwenden Sie eine Differentialgleichung wie etwa die folgende:

$$y'' - ay = 0$$

In Teil II werde ich Ihnen zeigen, wie Sie mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung umgehen und dazu eine Vielfalt an Werkzeugen anwenden, wie beispielsweise die *Wronski-Matrix-Determinante*, die Ihnen mitteilt, ob es Lösungen für eine Differentialgleichung zweiter (oder höherer) Ordnung gibt. Neben anderen Werkzeugen stelle ich Ihnen die Methode der *unbestimmten Koeffizienten* sowie die Methode der *Parametervariation* vor.

Nach den Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung ist es nur natürlich, wenn Sie noch mehr Spaß wollen, d.h. Sie wollen zu den Differentialgleichungen höherer Ordnung weitergehen, um die es ebenfalls in Teil II gehen wird. Bei diesen höheren Gleichungen finden Sie Terme wie $d^n y / dx^n$ mit $n > 2$.

Die Ableitung $d^n y / dx^n$ wird auch als $y^{(n)}$ dargestellt. Unter Verwendung der Standardsyntax werden Ableitungen als y', y'', y''', y^{iv}, y^{v} usw. dargestellt.

Differentialgleichungen höherer Ordnungen können kompliziert sein: für viele davon gibt es überhaupt keine Lösungen. Aber keine Sorge. Ich werde versuchen, Ihnen bei der Lösung zu helfen – und verschaffe Ihnen dazu das Wissen der Mathematiker von über 300 Jahren.

Spaß mit fortgeschrittenen Techniken

In Teil III dieses Buchs werden Sie Dutzende Werkzeuge kennen lernen. Alle diese Werkzeuge wurden im Laufe der Jahre entwickelt und erfolgreich eingesetzt. Laplace-Transformationen, die Euler-Methode, Integrationsfaktoren, numerische Methoden – all dies finden Sie hier in diesem Buch.

Genau um diese Werkzeuge geht es in diesem Buch – um die Anwendung von Hunderten von Jahren Erfahrung in der Lösung von Differentialgleichungen. Wie Sie vielleicht wissen, können Differentialgleichungen dem Typ nach eingeordnet werden, und es gibt immer geeignete Werkzeuge, die Ihnen bei der Arbeit mit dem jeweils vorliegenden Typ helfen. In diesem Buch finden Sie zahlreiche leistungsfähige Werkzeuge, die nur drauf warten, alle Ihre Differentialgleichungen zu lösen – von der allereinfachsten bis hin zur scheinbar unmöglichen!