

Inhaltsverzeichnis

<i>Einführung</i>	17
Über dieses Buch	17
Konventionen in diesem Buch	17
Was Sie nicht lesen müssen	18
Falsche Voraussetzungen	18
Wie dieses Buch strukturiert ist	18
Teil I: Differentialgleichungen erster Ordnung	18
Teil II: Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung	18
Teil III: Es wird spannend: Potenzreihen und reguläre Punkte	19
Teil IV: Der Teil der Zehn	19
Die Symbole in diesem Buch	19
Wie es weitergeht	20
<i>Teil I</i>	
<i>Differentialgleichungen erster Ordnung</i>	21
<i>Kapitel 1</i>	
<i>Willkommen in der Welt der Differentialgleichungen!</i>	23
Das Wesen der Differentialgleichungen	24
Ableitungen: Die Grundlage der Differentialgleichungen	26
Ableitungen, die Konstanten sind	27
Ableitungen, die Potenzen sind	27
Ableitung mit Trigonometrie	28
Ableitungen mit mehreren Funktionen	28
Das große Ganze mit Hilfe der Richtungsfelder erkennen	28
Ein Richtungsfeld zeichnen	29
Verbindung von Steigungen zu einer Integralkurve	30
Erkennen des Gleichgewichtswerts	31
Differentialgleichungen klassifizieren	32
Klassifizierung der Gleichungen der Ordnung nach	32
Klassifizierung als gewöhnliche und partielle Gleichungen	33
Klassifizierung als lineare oder nicht lineare Gleichungen	34
Differentialgleichungen erster Ordnung lösen	35
Die Arbeit mit Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung	35
Spaß mit fortgeschrittenen Techniken	36
<i>Kapitel 2</i>	
<i>Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung</i>	37
Ganz von vorne: Grundlagen für die Lösung linearer Differentialgleichungen erster Ordnung	38

Differentialgleichungen für Dummies

Anfangsbedingungen von Anfang an anwenden	38
Und jetzt lösen wir Differentialgleichungen mit Funktionen	39
Und jetzt nehmen wir ein paar Konstanten dazu	39
Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit Hilfe von Integrationsfaktoren lösen	40
Nach einem Integrationsfaktor suchen	40
Mit Hilfe eines Integrationsfaktors eine Differentialgleichung lösen	41
Der nächste Schritt: Integrationsfaktoren in Differentialgleichungen mit Funktionen einsetzen	43
Und jetzt eine ganz besondere Abkürzung!	43
Ein fortgeschrittenes Beispiel lösen	46
Prüfen, ob eine Lösung für eine Differentialgleichung erster Ordnung existiert	48
Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für lineare Differentialgleichungen	48
Die allgemeine Lösung finden	49
Ein paar Beispiele für Existenz und Eindeutigkeit	50
Feststellen, ob es eine Lösung für eine nicht lineare Differentialgleichung gibt	51
Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für nicht lineare Differentialgleichungen	51
Einige Beispiele für den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für nicht lineare Differentialgleichungen	52
<i>Kapitel 3</i>	
<i>Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung</i>	55
Die Grundlagen separierbarer Differentialgleichungen	56
Einfach anfangen: Lineare separierbare Gleichungen	57
Implizite Lösungen	57
Explizite Lösungen aus impliziten Lösungen ableiten	59
Schwer zu knacken: Wann es keine explizite Lösung gibt	61
Ein praktischer Trick: Nicht lineare separierbare Gleichungen in lineare separierbare Gleichungen umwandeln	63
Einige separierbare Gleichungen aus der Praxis	65
Ein Flussproblem in den Griff bekommen	65
Eine monetäre Aufgabenstellung	68
Partialbrüche in separierbaren Gleichungen	71
<i>Kapitel 4</i>	
<i>Exakte Differentialgleichungen erster Ordnung und die Euler-Methode</i>	75
Grundlagen exakter Differentialgleichungen	75
Exakte Differentialgleichungen definieren	75
Eine typische exakte Differentialgleichung berechnen	76
Feststellen, ob eine Differentialgleichung exakt ist	77
Einen praktischen Satz ausprobieren	78
Den Satz anwenden	79
Nicht exakte Differentialgleichungen mit Hilfe von Integrationsfaktoren bezwingen	81
Einen Integrationsfaktor finden	82

Mit Hilfe eines Integrationsfaktors eine exakte Gleichung erhalten	84
Der letzte Schliff: Die exakte Gleichung lösen	85
Mit der Euler-Methode numerisch werden	86
Die Methode verstehen	86
Die Genauigkeit der Methode auf einem Computer überprüfen	88
Differenzgleichungen	95
Ein bisschen praktische Terminologie	96
Iterative Lösungen	96
Gleichgewichtslösungen	97
Teil II	
Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung	99
Kapitel 5	
Lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung	101
Differentialgleichungen zweiter Ordnung – Grundlagen	101
Lineare Gleichungen	102
Homogene Gleichungen	103
Lineare homogene Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	103
Elementare Lösungen	104
Anfangsbedingungen	105
Charakteristische Gleichungen kennen lernen	106
Reelle und unterschiedliche Nullstellen	106
Komplexe Nullstellen	109
Identische reelle Nullstellen	114
Eine zweite Lösung durch Reduzierung der Ordnung erhalten	118
Wie die Reduzierung der Ordnung funktioniert	118
Ein Beispiel	119
Und jetzt alles zusammen – mit ein paar praktischen Sätzen	121
Superposition	121
Lineare Unabhängigkeit	122
Die Wronski-Determinante	124
Kapitel 6	
Lineare inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung	131
Die allgemeine Lösung von linearen inhomogenen Gleichungen zweiter Ordnung	131
Ein wichtiger Satz	131
Der Satz in der Praxis	132
Spezielle Lösungen mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten ermitteln	134
Wenn $g(x)$ die Form $e^{\lambda x}$ hat	135
Wenn $g(x)$ ein Polynom der Ordnung n ist	135
Wenn $g(x)$ eine Kombination aus Sinus und Kosinus ist	138
Wenn $g(x)$ ein Produkt aus zwei unterschiedlichen Formen ist	140

Differentialgleichungen für Dummies

Gleichungen mit der Methode der Parametervariation lösen	141
Die Grundlagen der Methode	142
Ein typisches Beispiel	143
Die Methode auf beliebige lineare Gleichungen anwenden	144
Ein schönes Paar! Die Parametervariation trifft die Wronski-Determinante	148
Federn und andere Sprunghaftigkeiten	149
Eine Masse ohne Reibung	149
Eine Masse mit Zugkraft	154
Kapitel 7	
<i>Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung</i>	157
Schreibarbeit: Die Notation für Differentialgleichungen höherer Ordnung	158
Die Grundlagen linearer homogener Gleichungen höherer Ordnung	159
Format, Lösungen und Anfangsbedingungen	159
Einige praktische Sätze	160
Verschiedene Arten linearer homogener Gleichungen höherer Ordnung	161
Reelle und unterschiedliche Nullstellen	161
Eine Gleichung dritter Ordnung	162
Reelle und imaginäre Nullstellen	166
Komplexe Nullstellen	168
Mehrfache Nullstellen	170
Kapitel 8	
<i>Lineare inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung</i>	175
Die Methode unbestimmter Koeffizienten für Gleichungen höherer Ordnung	176
$g(x)$ hat die Form e^{rx}	177
$g(x)$ ist ein Polynom der Ordnung n	180
$g(x)$ ist eine Kombination aus Sinus und Kosinus	183
Gleichungen höherer Ordnung mit Hilfe der Parametervariation lösen	186
Grundlagen der Methode	186
Ein Beispiel	187
Teil III	
<i>Es wird spannend! – Fortgeschrittene Techniken</i>	191
Kapitel 9	
<i>Es wird ernst: Potenzreihen und reguläre Punkte</i>	193
Grundlagen der Potenzreihen	193
Mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz einer Potenzreihe feststellen	194
Die Grundlagen des Quotientenkriteriums	194
Wir setzen ein paar Zahlen ein	195
Beispiel 3	196
Den Reihenindex verschieben	196
Taylor-Reihen	197
Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe von Potenzreihen lösen	198
Wenn Sie die Lösung bereits kennen	199

Wenn die Lösung nicht im Voraus bekannt ist	205
Ein berühmtes Problem: Die Airy-Gleichung	208
Kapitel 10	
Singuläre Punkte	213
Die Grundlagen singulärer Punkte	213
Singuläre Punkte finden	214
Das Verhalten singulärer Punkte	214
Reguläre und irreguläre singuläre Punkte	215
Erstaunliche Euler-Gleichungen	219
Reelle und unterschiedliche Nullstellen	220
Reelle und gleiche Nullstellen	221
Komplexe Nullstellen	222
Mit einem Satz alles zusammenfassen	223
Reihenlösungen in der Nähe singulärer Punkte bestimmen	224
Die allgemeine Lösung identifizieren	224
Grundlagen für die Lösung von Gleichungen in der Nähe singulärer Punkte	226
Ein numerisches Beispiel für die Lösung einer Gleichung in der Nähe singulärer Punkte	228
Eine genauere Betrachtung der Kenngleichungen	233
Kapitel 11	
Laplace-Transformationen	237
Eine typische Laplace-Transformation genauer betrachten	237
Entscheiden, wann eine Laplace-Transformation konvergiert	238
Grundlegende Laplace-Transformationen berechnen	239
Die Transformation von 1	239
Die Transformation von e^{at}	240
Die Transformation von $\sin(at)$	240
Eine praktische Tabelle sorgt für Erleichterung	241
Differentialgleichungen mit Hilfe von Laplace-Transformation lösen	243
Einige Sätze bringen Sie auf den Weg	244
Eine homogene Gleichung zweiter Ordnung lösen	245
Eine inhomogene Gleichung zweiter Ordnung lösen	248
Eine Gleichung höherer Ordnung lösen	252
Laplace-Transformationen faktorisieren und Faltungsintegrale	255
Eine Laplace-Transformation in Brüche faktorisieren	255
Faltungsintegrale genauer betrachten	256
Schrittfunktionen beobachten	258
Definition der Schrittfunktion	258
Die Laplace-Transformation der Schrittfunktion ermitteln	259

Kapitel 12

Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung 261

Matrizengrundlagen	261
Eine Matrix einrichten	262
Die ganze Algebra	263
Matrizen genauer betrachten	264
Matrixoperationen	265
Gleichheit	265
Addition	265
Subtraktion	265
Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl	266
Multiplikation von zwei Matrizen	266
Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	267
Einheitsmatrix	267
Das Inverse einer Matrix	268
Spaß mit Eigenvektoren und anderem	273
Lineare Unabhängigkeit	273
Eigenwerte und Eigenvektoren	276
Lineare homogene Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	278
Die Grundlagen	279
Es folgt ein Beispiel	280
Inhomogene lineare Gleichungssysteme erster Ordnung lösen	283
Die korrekte Form der spezielle Lösung annehmen	283
Zahlen knacken	284
Das Fazit	286

Kapitel 13

Drei ausfallsichere numerische Methoden 287

Zahlenknacken mit der Euler-Methode	288
Die Grundlagen der Methode	288
Mit Hilfe von Code die Methode in der Praxis beobachten	289
Die verbesserte Euler-Methode	295
Die Verbesserungen	295
Der neue Code	296
Eine steilere Steigung in den neuen Code einfügen	302
Noch mehr Genauigkeit durch die Runge-Kutta-Methode	307
Die Rekursionsrelation der Methode	307
Mit der Methode im Code arbeiten	308

Teil IV	315
Top Ten Teil	
Kapitel 14	
Zehn äußerst hilfreiche Online-Anleitungen zum Thema	
Differentialgleichungen	317
Differentialgleichungen auf Matroids Matheplanet	317
Mathematik-Online-Kurs der Universität Stuttgart	317
MATHEMATIK-VERSTEHEN	317
Mathepedia	317
Die Einführung in Differentialgleichungen auf AnalyzeMath.com	318
Harvey Mudd College Mathematics Online Tutorial	318
Einführung in Differentialgleichungen von John Appleby	318
Die Seite von Kardi Teknomo	318
Übungen zu Differentialgleichungen von Martin J. Osborne	318
Video Tutorial von Midnight Tutor	318
Die Einführung in Differentialgleichungen der Ohio State University,	
Physics Department	319
Paul's Online Math Notes	319
S.O.S. Math	319
University of Surrey Tutorial	319
Kapitel 15	
Zehn wirklich coole Online-Werkzeuge zur Lösung	
von Differentialgleichungen	321
Das Applet für die Runge-Kutta-Methode von AnalyzeMath.com	321
Der Graphing Calculator von Coolmath.com	321
Direction Field Plotter	321
Ein Gleichungslöser von QuickMath Automatic Math Solutions	322
Löser für Differentialgleichungen erster Ordnung	322
GCalc Online-Graphiktaschenrechner	322
JavaView Ode Solver	322
Der Systemlöser von Math @ CowPi	322
Ein Matrixinverter von QuickMath Automatic Math Solutions	323
Visual Differential Equation Solving Applet	323

