Noch einmal zu den Grundlagen: Algebra und Geometrie

1

In diesem Kapitel...

- Operationen an Brüchen
- Die elementare Algebra aufpolieren
- Die Geometrie ins Lot bringen

Ich weiß, ich weiß. Dies ist ein Arbeitsbuch zur *Analysis*, was soll also dieser ganze Aufstand von wegen Algebra und Geometrie? Keine Sorge, ich werde nicht allzu viele kostbare Seiten mit Algebra und Geometrie vergeuden, aber diese Themen sind ziemlich wichtig für die Analysis. Ohne Algebra können Sie keine Analysis betreiben – Sie können ja schließlich ohne Französischkenntnisse auch keine französischen Gedichte schreiben. Und Elementargeometrie (ohne geometrische Beweise!) ist deswegen so entscheidend, weil es bei der Analysis häufig um praktische Probleme mit Winkeln, Steigungen, Formen usw. geht. In diesem Kapitel – und in Kapitel 2, wo es um Funktionen und Trigonometrie gehen wird – stelle ich Ihnen deshalb ein paar schnelllösbare Aufgaben, so dass Sie Ihr Wissen wieder auffrischen können. Falls Sie all dies bereits aus dem Effeff beherrschen, blättern Sie weiter zu Kapitel 3.

Falls Sie bei ein paar Fragen daneben liegen und nicht genau wissen, warum, dann lesen Sie in Ihren alten Lehrbüchern nach oder sehen Sie sich den großartigen Überblick über die Voraussetzungen der Analysis in *Analysis für Dummies* an. Es ist wirklich wichtig, diese Grundlagen ständig parat zu haben.

Der Frust mit den Brüchen

Viele Schüler hassen Brüche. Vielleicht hat ihnen das Konzept nicht gleich zu Beginn eingeleuchtet, und mit jedem weiteren Mathe-Kurs ist der Umgang mit Brüchen dann immer frustrierender für sie geworden.

Aber ohne ein Verständnis für Brüche werden Sie die Analysis nicht verstehen. Die Definition der Ableitung selbst beispielsweise basiert auf einem Bruch, der als *Differenzquotient* bezeichnet wird. Und darüber hinaus ist auch das Symbol für die Ableitung, $\frac{dy}{dx}$, ein Bruch.

Wenn Sie also nicht mehr ganz fit beim Thema Brüche sind, sollten Sie sich schnell an die folgenden Aufgaben machen!

Beispiel

1. Lösen Sie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

2. Lösen Sie $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$.

Lösung

1. $\boldsymbol{\frac{ac}{bd}}$. Für die Multiplikation von Brüchen multiplizieren Sie den Nenner mit dem Nenner und den Zähler mit dem Zähler. Hier wird *nicht* kreuzmultipliziert!

2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \boldsymbol{\frac{ad}{bc}}$. Um durch einen Bruch zu dividieren, bilden Sie den Kehrbruch des Bruchs und multiplizieren damit.

Aufgabe 1

Lösen Sie $\frac{5}{0} = ?$

Aufgabe 2

Lösen Sie $\frac{0}{10} = ?$

Aufgabe 3

Ist $\frac{3a+b}{3a+c}$ gleich $\frac{a+b}{a+c}$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 4

Ist $\frac{3a+b}{3a+c}$ gleich $\frac{b}{c}$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 5

Ist $\frac{4ab}{4ac}$ gleich $\frac{ab}{ac}$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 6

Ist $\frac{4ab}{4ac}$ gleich $\frac{b}{c}$? Warum oder warum nicht?

Algebraisches Allgemeinwissen: Was Ihnen bei jeder Miss-Wahl abverlangt wird...

Dieser Abschnitt bietet einen kurzen Überblick über Grundlagen der Algebra, wie etwa Faktoren, Potenzen und Wurzeln, Logarithmen und Quadrate. An diesen Grundlagen führt kein Weg vorbei!

Beispiel

1. Faktorisieren Sie $9x^4 - y^6$.

2. Schreiben Sie $x^{2/5}$ ohne Bruchpotenz.

Lösung

1. $9x^4 - y^6 = \left(\mathbf{3x^2 - y^3}\right) \times \left(\mathbf{3x^2 + y^3}\right)$.
Dies ist ein Beispiel für das allerwichtigste Faktorisierungsmuster:
$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$.
Merken Sie sich das!

2. $\sqrt[5]{x^2} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^2$. Vergessen Sie nicht, wie Bruchpotenzen funktionieren!

Aufgabe 7

Schreiben Sie x^{-3} ohne negative Potenz.

Aufgabe 8

Ist $(abc)^4$ dasselbe wie $a^4b^4c^4$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 9

Ist $(a+b+c)^4$ dasselbe wie $a^4+b^4+c^4$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 10

Schreiben Sie $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ unter Verwendung eines einzigen Wurzelzeichens.

Aufgabe 11

Ist $\sqrt{a^2+b^2}$ dasselbe wie $a + b$? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 12

Schreiben Sie $\log_a b = c$ als Exponentialgleichung.

Aufgabe 13

Schreiben Sie $\log_c a - \log_c b$ als einen einzigen Logarithmus.

Aufgabe 14

Schreiben Sie $\log 5 + \log 200$ als einen einzigen Logarithmus und lösen Sie ihn auf.

Aufgabe 15

Lösen Sie $5x^2 = 3x + 8$ unter Verwendung der Quadratformel nach x auf.

Aufgabe 16

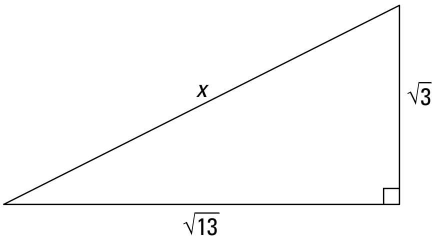
Lösen Sie $|3x + 2| > 14$.

Geometrie: Wer soll das je brauchen?

Mit Hilfe der Analysis können Sie Probleme aus dem täglichen Leben lösen, bei denen es um Oberflächen, Volumen und Formen geht. Beispielsweise können Sie das Volumen einer zylinderförmigen Suppendose so groß wie möglich machen oder die Belastung an einem in parabolischer Form hängenden Kabel bestimmen. Sie sollten deshalb die grundlegenden geometrischen Formeln für Länge, Fläche und Volumen kennen. Außerdem benötigen Sie die wichtigsten Kenntnisse über Dinge wie etwa den Satz von Pythagoras, proportionale Formen und grundlegende Koordinatengeometrie, wie etwa die Distanzformel.

Beispiel

1. Wie groß ist die Fläche des abgebildeten Dreiecks?



2. Wie lang ist die Hypotenuse des Dreiecks aus dem vorigen Beispiel?

Lösung

1. $\mathbf{\dfrac{\sqrt{39}}{2}}$

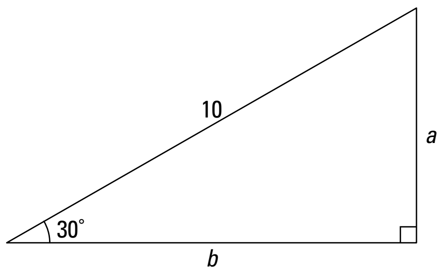
$$
\begin{aligned}
Fläche_{Dreieck} &= \frac{1}{2} Grundlinie \cdot Höhe \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}\sqrt{3} \\
&= \frac{\sqrt{39}}{2}
\end{aligned}
$$

2. $\mathbf{x = 4}$

$$
\begin{aligned}
&a^2 + b^2 = c^2 \\
&x^2 = a^2 + b^2 \\
&x^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{3}^2 \\
&x^2 = 13 + 3 \\
&x^2 = 16 \\
&x = 4
\end{aligned}
$$

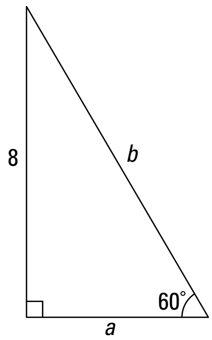
Aufgabe 17

Tragen Sie die zwei fehlenden Längen für die Seiten des Dreiecks in der folgenden Abbildung ein.



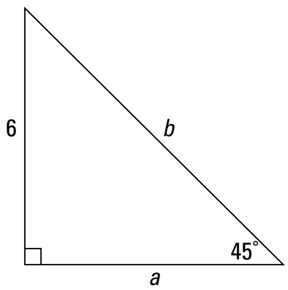
Aufgabe 18

Wie lang sind die beiden Seiten ohne Längenangabe in dem nachfolgend abgebildeten Dreieck?



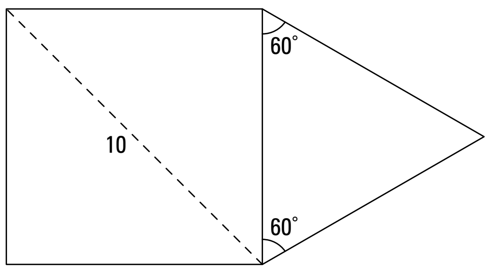
Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Längen der Seiten ohne Längenangabe des nachfolgend abgebildeten Dreiecks.



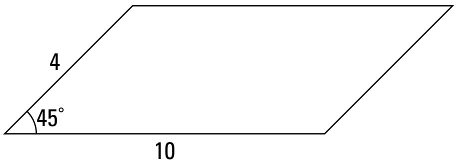
Aufgabe 20

1. Wie groß ist die Gesamtfläche des Fünfecks in der folgenden Abbildung?
2. Wie groß ist der Umfang?



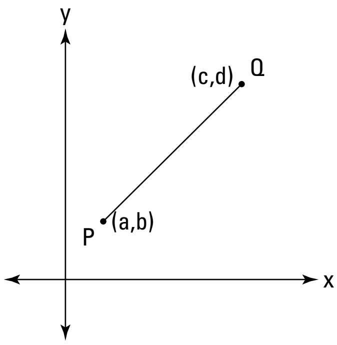
Aufgabe 21

Berechnen Sie die Fläche des nachfolgend gezeigten Parallelogramms.



Aufgabe 22

Welche Steigung hat $\overline{PQ}$?



Aufgabe 23

Wie lang ist die Strecke zwischen P und Q in der Abbildung zu Frage 22?

Aufgabe 24

Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunkts von $\overline{PQ}$ in der Abbildung zu Frage 22?

Lösungen für diesen einfachen Elementarkram

1. Lösen Sie $5/0 = ?$. $\mathbf{5/0}$ **ist nicht definiert**. Verwechseln Sie das nicht mit etwas wie $0/8$, was gleich 0 ist. Wenn Sie sich diese beiden Brüche in Form einer Steigung ($\frac{Höhe}{Länge}$) vorstellen, hat $5/0$ eine *Höhe* von 5 und eine *Länge* von 0, wodurch Sie eine *vertikale* Gerade erhalten, die eine unendliche Steilheit oder Steigung aufweist (und deshalb eben nicht definiert ist). Oder denken Sie einfach daran, dass es unmöglich ist, auf einer vertikalen Straße zu fahren, und ebenso unmöglich, eine Steigung für eine vertikale Gerade anzugeben. Der Bruch $0/8$ dagegen hat eine *Höhe* von 0 und eine *Länge* von 8, womit Sie eine *horizontale* Gerade haben, die überhaupt keine Steilheit hat und damit eine ganz gewöhnliche Steigung von Null aufweist. Natürlich ist es auch völlig alltäglich auf einer horizontalen Straße zu fahren.

2. $\mathbf{\frac{0}{10} = 0}$. (Siehe Lösung Aufgabe 1.)

3. Ist $\frac{3a+b}{3a+c}$ dasselbe wie $\frac{a+b}{a+c}$? **Nein**. Die 3 kann nicht gekürzt werden.

Es ist nicht möglich, in einem Bruch zu kürzen, wenn nicht im gesamten Nenner eine ununterbrochene Multiplikationskette vorliegt, ebenso wie im Zähler.

4. Ist $\frac{3a+b}{3a+c}$ gleich $\frac{b}{c}$? **Nein**. 3a kann nicht gekürzt werden. (Siehe obige Warnung.)

5. Ist $\frac{4ab}{4ac}$ gleich $\frac{ab}{ac}$? **Ja**. Sie können 4 kürzen, weil der ganze Zähler und der ganze Nenner aus Multiplikationsketten bestehen.

6. Ist $\frac{4ab}{4ac}$ gleich $\frac{b}{c}$? **Ja**. Sie können $4a$ kürzen.

7. Schreiben Sie x^{-3} ohne negative Potenz. $\mathbf{\frac{1}{x^3}}$.

8. Ist $(abc)^4$ gleich $a^4b^4c^4$? **Ja**. Exponenten verteilen sich über die Multiplikation.

9. Ist $(a+b+c)^4$ gleich $a^4b^4c^4$? **Nein**! Exponenten verteilen sich nicht über Addition (oder Subtraktion).

Wenn Sie an einer Aufgabe arbeiten und sich nicht mehr an die algebraische Regel erinnern, probieren Sie, die Aufgabe mit Zahlen statt mit Variablen zu berechnen. Ersetzen Sie die Variablen durch einfache, gerade Zahlen und berechnen Sie die numerische Aufgabe. (Verwenden Sie aber nicht 0, 1 oder 2, weil diese Zahlen spezielle Eigenschaften aufweisen, die Ihr ganzes Beispiel zunichte machen könnten.) Was für Zahlen funktioniert, funktioniert auch für Variablen, und was für Zahlen nicht funktioniert, funktioniert auch nicht für Variablen. Beachten Sie, was passiert, wenn Sie das obige Beispiel unter Verwendung von Zahlen ausprobieren:

$$(3+4+6)^4 \stackrel{?}{=} 3^4+4^4+6^4$$
$$13^4 \stackrel{?}{=} 81+256+1296$$
$$28561 \neq 1633$$

10. Schreiben Sie $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ unter Verwendung eines einzigen Wurzelzeichens. $\boldsymbol{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}}$.

11. Ist $\sqrt{a^2+b^2}$ gleich $a + b$? **Nein**! Die Erklärung ist im Grunde genommen dieselbe wie für Aufgabe 9. Überlegen Sie folgendes: Wenn Sie die Wurzel zu einer Potenz machen, erhalten Sie $\sqrt{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{1/2}$. Weil Sie aber die Potenz nicht verteilen können, ist $(a^2+b^2)^{1/2} \neq (a^2)^{1/2}+(b^2)^{1/2}$ oder $a + b$, und damit ist $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$.

12. Schreiben Sie $\log_a b = c$ als Exponentialgleichung. $\boldsymbol{a^c = b}$.

13. Schreiben Sie $\log_c a - \log_c b$ als einen einzigen Logarithmus. $\boldsymbol{\log_c \frac{a}{b}}$.

14. Schreiben Sie log 5 + log 200 mit einem einzigen Logarithmus und lösen Sie dann. $\log 5 + \log 200 = \log(5\cdot 200) = \log 1000 = \mathbf{3}$.

Wenn Sie »log« ohne Basiszahl sehen, ist die Basis 10 gemeint.

15. Lösen Sie $5x^2 = 3x+8$ unter Verwendung der Quadratformel nach x auf. $\boldsymbol{x = \frac{8}{5}}$ oder $\mathbf{-1}$. Fangen Sie damit an, $5x^2 = 3x+8$ umzuformen in $5x^2-3x-8=0$, weil auf einer Seite der Gleichung eine Null stehen sollte.

    Die Quadratformel besagt, dass $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Wenn Sie 5 für a, –3 für b und –8 für c einsetzen, erhalten Sie $x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(5)(-8)}}{2\cdot 5} = \frac{3\pm\sqrt{9+160}}{10} = \frac{3\pm 13}{10} = \frac{16}{10}$ oder $\frac{-10}{10}$, also ist $x = \frac{8}{5}$ oder -1.

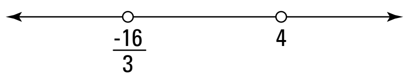
16. Lösen Sie $|3x+2|>14$. $\boldsymbol{x<-\frac{16}{3}\cup x>4}$.

   a. Wandeln Sie die Ungleichung in eine Gleichung um: $|3x+2|=14$.

   b. Lösen Sie die Betragsgleichung.

   $$3x+2=14 \qquad\qquad 3x+2=-14$$
   $$3x=12 \qquad \text{oder} \qquad 3x=-16$$
   $$x=4 \qquad\qquad x=-\frac{16}{3}$$

   c. Stellen Sie beide Lösungen auf einem Zahlenstrahl dar (siehe folgende Abbildung). (Für > und < sind hier kleine Kreise dargestellt; wären ≥ oder ≤ in der Aufgabenstellung vorgekommen, würde die Darstellung ausgefüllte Punkte verwenden.)



   d. Probieren Sie jeweils eine Zahl aus jedem der drei Bereiche auf dem Zahlenstrahl in der ursprünglichen Ungleichung aus.

   Hier verwenden wir -10, 0 und 10.

   $|3\cdot(-10)+|2\overset{?}{>}14$

   $|-28|\overset{?}{>}14$

   $28\overset{?}{>}14$

   Das ist richtig, Sie können also den linken Bereich markieren.

   $|3\cdot(0)+|2\overset{?}{>}14$

   $2\overset{?}{>}14$

   Das ist falsch, der mittlere Bereich darf also nicht markiert werden.

   $|3\cdot(10)+|2\overset{?}{>}14$

   $|32|\overset{?}{>}14$

   $32\overset{?}{>}14$

   Das ist richtig, Sie können also den Bereich auf der rechten Seite markieren. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis. x kann eine beliebige Zahl aus den Bereichen sein, die in der Abbildung markiert sind. Und so lautet Ihre Lösung:

e. Wenn Sie Wert darauf legen, können Sie diese Lösung auch in Symbolschreibweise darstellen.

Weil x eine Zahl aus dem linken Bereich oder eine Zahl aus dem rechten Bereich sein kann, ist dies eine *oder*-Lösung, d.h. eine Vereinigung ($\cup$). Wenn Sie alles aus beiden Bereichen auf dem Zahlenstrahl einbeziehen wollen, drücken Sie dies als die *Vereinigung* der beiden Bereiche aus. Die Lösung in Symboldarstellung lautet also:

$$x < -\frac{16}{3} \cup x > 4$$

Wäre nur der mittlere Bereich markiert, hätten Sie eine *und*-Lösung oder eine *Schnittmenge* ($\cap$). Wenn Sie nur den Bereich auf dem Zahlenstrahl wollen, wo sich die beiden Bereiche überlappen, verwenden Sie die Schnittmenge der beiden Bereiche. Unter Verwendung der obigen Beispielpunkte auf dem Zahlenstrahl würden Sie die Lösung für den mittleren Bereich wie folgt ausdrücken:

$$x > -\frac{16}{3} \text{ und } x < 4 \text{ oder}$$

$$x > -\frac{16}{3} \cap x < 4 \text{ oder}$$

$$-\frac{16}{3} < x < 4\,.$$

Welche Darstellung man wählt, ist letztlich Geschmacksfrage.

Denken Sie in Bezug auf die Betragswerte unbedingt daran, dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist. $\sqrt{x^2}$ ist *nicht* gleich $\pm x$.

17. Tragen Sie die beiden fehlenden Seitenlängen für das Dreieck ein. **a = 5 und $b = 5\sqrt{3}$**. Dies ist ein 30°-60°-90°-Dreieck. Alles klar?

18. Tragen Sie die beiden fehlenden Seitenlängen für das Dreieck ein.

$$\boldsymbol{a = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ oder } \frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ oder } \frac{16\sqrt{3}}{3}}$$

Noch ein 30°-60°-90°-Dreieck!

19. Tragen Sie die beiden fehlenden Seitenlängen für das Dreieck ein. **a = 6 und $b = 6\sqrt{2}$.** Kennen Sie sich aus mit 45°-45°-90°-Dreiecken ?

20. 1. Wie groß ist die Fläche des Fünfecks? $\boldsymbol{50 + \frac{25\sqrt{3}}{2}}$.

Das Quadrat ist $\frac{10}{\sqrt{2}}$ mal $\frac{10}{\sqrt{2}}$ groß (weil ein halbes Quadrat ein 45°-45°-90°-Dreieck ist), seine Fläche ist also $\frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{100}{2} = 50$. Das gleichseitige Dreieck hat eine Basis von $\frac{10}{\sqrt{2}}$ oder $5\sqrt{2}$, seine Höhe ist also $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (weil die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ein 30°-60°-90°-Dreieck ist). Die Fläche des Dreiecks ist also $\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}\right)\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{25\sqrt{12}}{4} = \frac{50\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$. Die Gesamtfläche beträgt also $50 + \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

2. Wie groß ist der Umfang? **Die Lösung lautet $\mathbf{25\sqrt{2}}$.**

   Die Seiten des Quadrats sind $\frac{10}{\sqrt{2}}$ oder $5\sqrt{2}$, ebenso wie die Seiten des gleichseitigen Dreiecks.

   Das Fünfeck hat fünf Seiten, der Umfang beträgt also $5 \cdot 5\sqrt{2}$ oder $25\sqrt{2}$.

21. Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms. Die Lösung lautet $\mathbf{20\sqrt{2}}$.

    Die Höhe ist $\frac{4}{\sqrt{2}}$ oder $2\sqrt{2}$, weil die Höhe einer der Schenkel eines 45°-45°-90°-Dreiecks ist, dessen Basis 10 ist. Weil die Fläche eines Parallelogramms gleich der *Basis* multipliziert mit der *Höhe* ist, ist die Fläche $10 \cdot 2\sqrt{2}$ oder $20\sqrt{2}$.

22. Welche Steigung hat $\overline{PQ}$? $\boldsymbol{\frac{d-b}{c-a}}$. Sie wissen, dass Steigung = $\frac{\textit{Höhe}}{\textit{Länge}}$ ist, also $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

23. Wie weit ist P von Q entfernt? $\boldsymbol{\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}}$.

Merken Sie sich, dass *Abstand* = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ist.

24. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunkts von $\overline{PQ}$? $\boldsymbol{\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)}$. Der Mittelpunkt eines Segments ist gegeben durch den Mittelwert aus den beiden x-Koordinaten und den Mittelwert aus den beiden y-Koordinaten.