

Inhaltsverzeichnis

<i>Einführung</i>	17
Zu diesem Buch	17
Konventionen in diesem Buch	18
Was Sie nicht lesen müssen	18
Törichte Annahmen über den Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	18
Teil I: Die Grundlagen der linearen Algebra werden vorgestellt	19
Teil II: Vektoren und lineare Transformationen in Zusammenhang bringen	19
Teil III: Determinanten auswerten	19
Teil IV: Vektorräume erkunden	19
Teil V: Der Teil der Zehn	19
Symbole in diesem Buch	20
Wie es weitergeht	20
<i>Teil I</i>	
<i>Grundlagen der linearen Algebra</i>	23
<i>Kapitel 1</i>	
<i>Lineare Algebra – Was ist das?</i>	25
Gleichungssysteme entspannt lösen	25
Vergleichen durch die Anordnung von Daten in Matrizen	27
Vektorräume betrachten	29
Werte mit Hilfe von Determinanten bestimmen	30
Und nun Eigenwerte und Eigenvektoren	31
<i>Kapitel 2</i>	
<i>Vektoren</i>	33
Vektoren in der Ebene	33
Vektoren in der Koordinatenebene	34
Eine weitere Dimension – Vektoren im dreidimensionalen Raum	37
Definition der algebraischen und geometrischen Eigenschaften von Vektoren	38
Die Skalarmultiplikation	38
Vektoren addieren und subtrahieren	41
Den Betrag eines Vektors verwalten	43
Den Betrag für die Skalarmultiplikation anpassen	44
Alles wird gut: Mit der Dreiecksungleichung	45
Das innere Produkt verinnerlichen	48
Alles wird gut: Mit Winkeln	50

Kapitel 3	
Matrizen und Matrizenalgebra	55
Die Grundlagen für den Umgang mit Matrizen	55
Matrizennotation	55
Die Dimension definieren	56
Matrixoperationen	57
Matrizen addieren und subtrahieren	57
Die Skalarmultiplikation	58
Matrixmultiplikation	59
Die verschiedenen Matrizenarten	61
Identitätsmatrizen	62
Dreiecksmatrizen und diagonale Matrizen	64
Weiter mit invertierbaren und nicht invertierbaren Matrizen	64
Das Bindeglied: Matrixalgebra	65
Eigenschaften bei der Addition	65
Eigenschaften bei der Multiplikation	66
Distributivität bei Matrixmultiplikation und -addition	67
Eine Matrix transponieren	68
Nullmatrizen	69
Eigenschaften einer invertierbaren Matrix	70
Die Inverse einer Matrix	71
2×2 -Inverse schnell abgeleitet	71
Inverse mit Hilfe der Zeilenreduktion bestimmen	73
Kapitel 4	
Gleichungssysteme systematisch lösen	79
Lösungen für Systeme	79
Eigenschaften, die bei einer einzigen Lösung vorliegen	79
Ausdrücke für unendlich viele Lösungen	80
Systeme mit zwei oder drei Gleichungen graphisch darstellen	81
Inkonsistente Systeme ohne Lösung	85
Systeme algebraisch lösen	85
Zunächst ein System aus zwei Gleichungen	86
Das Verfahren wird auf mehr als zwei Gleichungen ausgeweitet	87
Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen lösen	89
Mit Hilfe von Inversen Systeme lösen	90
Erweiterte Matrizen	91
Parametrisierte Lösungen aus erweiterten Matrizen ableiten	95

Teil II	
Die Beziehung zwischen Vektoren und Lineartransformationen	97
Kapitel 5	
Linearkombinationen	99
Linearkombinationen von Vektoren – Definition	99
Vektoren als Summen anderer Vektoren schreiben	99
Feststellen, ob ein Vektor dazugehört	100
Nach Mustern in Linearkombinationen suchen	104
Linearkombinationen aus Vektoren visualisieren	105
Achtung, Spannweiten – die lineare Hülle!	106
Die lineare Hülle (Span) einer Vektormenge beschreiben	107
Zeigen, welche Vektoren in eine lineare Hülle gehören	109
\mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 aufspannen	111
Kapitel 6	
Die Matrixgleichung $Ax = b$	115
Matrix-Vektor-Produkte	115
Mit Matrixprodukten eine Verknüpfung herstellen	116
Gleichungssysteme und die Matrixgleichung in Verbindung bringen	118
Die Existenz einer oder mehrere Lösungen bestätigen	119
Eine einzelne Lösung herausfinden	120
Den Weg für mehrere Lösungen bereiten	121
Und wenn es keine Lösung gibt...	128
Kapitel 7	
Homogene Systeme und lineare Unabhängigkeit	131
Lösungen homogener Systeme suchen	131
Der Unterschied zwischen trivialen und nichttrivialen Lösungen	132
Die Formel für eine Lösung formulieren	133
Lineare Unabhängigkeit	136
Testen auf Abhängigkeit oder Unabhängigkeit	136
Charakterisierung linear unabhängiger Vektormengen	139
Die Verbindung mit der Basis	142
Die Basis eines Vektorraums kennen lernen	142
Wie man eine Basis bestimmt	144
Erweiterung der Basis auf Matrizen und Polynome	147
Die Dimension basierend auf der Basis bestimmen	150

Kapitel 8	
<i>Dinge ändern sich: Lineartransformationen (lineare Abbildungen)</i>	153
Lineartransformationen formulieren	153
Die richtige Sprache für Lineartransformationen	154
Erkennen, wann eine Transformation eine Lineartransformation ist	157
Eigenschaften von Lineartransformationen	159
Summeneigenschaften im Überblick	159
Die Zusammensetzung (Komposition) von Transformationen und einige Eigenschaften	161
Mit Identitätstransformationen die Identität prüfen	163
Die Distributiveigenschaft	165
Die Matrix einer Lineartransformation darstellen	166
Eine Matrix erstellen, die eine Vorschrift ersetzt	166
Transformationen unter Verwendung von Drehungen und Spiegelungen verdeutlicht	167
Translationen, Streckungen und Kontraktionen	170
Kern und Bild einer Lineartransformation bestimmen	172
Zuerst der Kern	172
Das Bild einer Lineartransformation	173
<i>Teil III</i>	
<i>Determinanten</i>	177
<i>Kapitel 9</i>	
<i>Mit Permutationen den Überblick behalten</i>	179
Permutationen berechnen und untersuchen	179
Zählen lernen	180
Eine Liste erstellen und nachprüfen	181
Permutationen in Matrizen darstellen (und umgekehrt)	183
Beim Zählen Inversionen berücksichtigen	184
Inversionen im Überblick	184
Gerade und ungerade Inversionen	186
<i>Kapitel 10</i>	
<i>Determinanten bestimmen</i>	187
Determinanten von 2×2 -Matrizen berechnen	187
Permutationen zur Bestimmung der Determinante verwenden	187
Die Kofaktor-Entwicklung	190
Mit Determinanten Fläche und Volumen berechnen	193
Die Flächen von Dreiecken bestimmen	193
Parallelogrammflächen bestimmen	196
Das Volumen eines Parallelepipeds bestimmen	199

Kapitel 11	
Die Eigenschaften von Determinanten	201
Determinanten transponieren und invertieren	201
Die Determinante einer Transposition bestimmen	202
Die Determinante der Inversen untersuchen	202
Zeilen oder Spalten vertauschen	204
Nulldeterminanten	205
Eine Zeile oder eine Spalte mit Nullen finden	205
Gleiche Zeilen oder Spalten ausnullen	206
Matrizenmanipulation durch Multiplikation und Kombination	208
Eine Zeile oder Spalte mit einem Skalar multiplizieren	208
Das Vielfache einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte addieren	210
Obere und untere Dreiecksmatrizen	211
Determinanten von Dreiecksmatrizen	211
Eine Dreiecksmatrix von Grund auf erstellen	213
Eine obere oder untere Dreiecksmatrix erstellen	215
Determinanten von Matrixprodukten	219
Kapitel 12	
Die Cramersche Regel nutzen	221
Inverse und Determinanten	221
Die Suche nach Inversen vorbereiten	221
Die Adjunkte einer Matrix	223
Die Schritte bis zur Inversen	225
Berechnungen mit variablen Einträgen	225
Mit der Cramerschen Regel Systeme lösen	227
Vorbereitung auf die Cramersche Regel	228
Anwendung der Cramerschen Regel	229
Eine Nicht-Lösung erkennen und einordnen	230
Hinweise aus algebraischen Lösungen und Lösungen mit erweiterten Matrizen	230
Mit Cramer nach Nicht-Lösungen suchen	231
Programme für Taschenrechner und Computer	232
Rechnen mit dem Taschenrechner	232
Mit einem Computer rechnen	233

Teil IV	
Vektorräume	235
Kapitel 13	
Die Eigenschaften von Vektorräumen	237
Vektorräume erkunden	237
Die beiden Operationen	239
Der Vektorraum wird größer – durch die Vektoraddition	239
Sinnvolle Vektormultiplikation	240
Mit den Vektoroperationen Abgeschlossenheit erzielen	240
Fehlende Abgeschlossenheit	242
Die besonderen Eigenschaften von Vektorräumen	243
Mit der Kommutativität der Vektoraddition die Reihenfolge ändern	243
Neugruppierung mit Addition und Skalarmultiplikation	245
Skalare über Vektoren verteilen	246
Das Konzept des Nullvektors	247
Die Inverse der Addition	248
Noch ein paar letzte aufmunternde Details	248
Kapitel 14	
Unterräume eines Vektorraums bestimmen	249
Eigenschaften von Unterräumen	249
Feststellen, ob man eine Untermenge hat	250
Wann eine Untermenge ein Vektorraum ist	252
Ein Erzeugendensystem für einen Unterraum finden	254
Ein mögliches Erzeugendensystem finden	254
Polynome in die Erzeugung aufnehmen	255
Die Ergebnisse mit einer schiefsymmetrischen Matrix verdrehen	256
Den Spaltenraum definieren und nutzen	257
Die Verbindung zwischen Nullraum und Spaltenraum	262
Kapitel 15	
Vektorraumbasen – es geht um das große Ganze	265
Mit Vektorräumen in die Geometrie	265
Zuerst die Geraden	265
Ebenen – gerade heraus	267
Aus Erzeugendensystemen Basen erzeugen	268
Orthogonalen Basen	270
Eine orthogonale Basis erstellen	272
Mit Hilfe der orthogonalen Basis die Linearkombination erzeugen	273
Orthogonal wird orthonormal	274
Denselben Vektor nach Änderung der Basen angeben	276

Kapitel 16	
<i>Eigenwerte und Eigenvektoren</i>	281
Eigenwerte und Eigenvektoren – eine Definition	281
Eigenvektoren einer Matrix demonstrieren	281
Die Definition des Eigenvektors	282
Eigenwerte anhand von Spiegelungen und Drehungen verdeutlichen	283
Nach Eigenwerten und Eigenvektoren auflösen	285
Die Eigenwerte einer 2×2 -Matrix bestimmen	286
Das Ganze mit einer 3×3 -Matrix vertiefen	288
Sonderfälle	290
Eigenwerte einer Matrixtransposition umwandeln	290
Der Eigenwert-Reziprokwert	291
Dreiecksmatrizen	292
Potenzen von Matrizen	293
Die Diagonalisierung hilft	294
Teil V	
<i>Der Teil der Zehn</i>	299
Kapitel 17	
<i>Zehn Anwendungen von Matrizen aus der Praxis</i>	301
Richtig essen	301
Verkehrssteuerung	302
Fuchs und Hase	304
Geheime Botschaften	304
Rettet den Fleckenkauz!	307
Populationswanderung	307
Genetischen Code aufschlüsseln	308
Wärmeverteilung	309
Wirtschaftspläne	310
Spiele mit Matrizen	311
Kapitel 18	
<i>Zehn (oder so) Prozesse der linearen Algebra, die Sie auf Ihrem Taschenrechner ausführen können</i>	317
Mit Hilfe von Geraden Gleichungssysteme lösen	317
Das meiste aus Matrizen machen	319
Matrizen addieren und subtrahieren	319
Mit einem Skalar multiplizieren	320
Zwei Matrizen multiplizieren	320
Zeilenoperationen	320
Zeilen vertauschen	321

Grundlagen der Linearen Algebra für Dummies

Zwei Zeilen addieren	321
Das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren	321
Eine Zeile mit einem Skalar multiplizieren	322
Eine Treppenform erzeugen	322
In Potenzen erheben und Inverse finden	323
Matrizen in Potenzen erheben	323
Inverse suchen	323
Die Ergebnisse einer Markov-Kette bestimmen	324
Systeme mit $A^{-1} \cdot B$ lösen	325
Anpassung von Stellenwerten	326

Kapitel 19

Zehn mathematische Bedeutungen griechischer Buchstaben **327**

π muss rund sein	327
Differenzen mit Δ ausdrücken	327
Summen entstehen mit Σ	328
Und jetzt ρ	328
Winkel brauchen θ	328
Ein bisschen Abwechslung mit ϵ	328
A- μ -sant	329
Das Lambda	329
Haben Sie einen Φ BK-Schlüssel?	329
Und ω zum Schluss	329

Glossar **331**

Stichwortverzeichnis **339**