1 Fantastische Verknüpfungen: Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel

- Die vier Grundrechenarten
- Bruchrechnen
- Diagramme zum Übermitteln und Verstehen von Informationen
- Strategien zum Umgang mit Textaufgaben

In der Mathematik gibt es grundlegende Rechenarten, die Sie beherrschen müssen. Diese Rechenarten sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division; erst sie ermöglichen die gesamte in diesem Buch vorgestellte Mathematik.

Die guten Nachrichten sind, dass Sie die Grundlagen (wie Zählen) schon vor dem Schuleintritt gelernt haben und mit den Rechenarten schon seit der Grundschule vertraut sind. Sie sind also schon lange dabei und ein bisschen was bleibt immer hängen.

In diesem Kapitel werden das Zählen und die vier Grundrechenarten wiederholt. Andere wichtige Punkte, die hier angesprochen werden, sind Brüche, Prozentrechnung, Tabellen, Diagramme und Textaufgaben. Doch keine Angst: Keiner dieser Punkte ist unerklärlich.

Zahlen, auf die Sie zählen können

Der grundlegendste Bestandteil der Mathematik sind Zahlen. Das Erste, was Sie mit Zahlen machen, ist zählen; damit haben Sie wahrscheinlich schon in sehr jungen Jahren begonnen. Seitdem Sie sprechen konnten, drängte Ihre Mutter Sie, Tante Inge zu sagen, wie alt Sie sind oder von eins bis fünf zu zählen.

Zählen war das Erste und Nützlichste, was Sie mit der Mathematik gemacht haben, und Sie benutzen es immer noch jeden Tag, egal ob Sie Orangen im Supermarkt kaufen oder den Ölstand Ihres Wagens überprüfen.

Das Zählen ist unentbehrlich, seitdem die Menschen die Erde bevölkern. Der Ishango-Knochen ist ein Kerbstock (Rechenstab), der über 20.000 Jahre alt ist!

Es gibt verschiedene Arten von Zahlen. Im Laufe der Zeit haben die Mathematiker ihnen viele Namen gegeben. Die beiden wichtigsten Arten sind ganze Zahlen und Brüche. Um zu zeigen, wie man mit diesen Zahlen arbeitet, verwendet man einen *Zahlenstrahl*, eine einfache Darstellung von Zahlen auf einer Linie (siehe Abbildung 1.1).

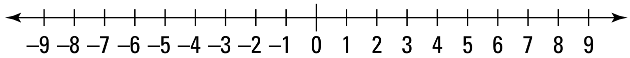

Abbildung 1.1: Ein Zahlenstrahl

Die Zahlen rechts der Null sind *natürliche* Zahlen oder *Zählnummern*. Das sind natürlich die Zahlen, mit denen Sie zählen. Mit ihnen kann man einfach umgehen, da sie angeben, wie viel jemand von etwas hat (beispielsweise sechs Äpfel oder drei Orangen.)

Über viele Jahrhunderte und in verschiedenen Kulturen haben die Menschen die Zahl Null gefunden, die das Fehlen einer Größe angibt. Die Zahlen links von der Null auf dem Zahlenstrahl, die *negativen* Zahlen, sind schwerer zu erfassen. Sie kennen aber negative Zahlen auch im realen Leben. Wenn Sie Ihr Konto überzogen haben, ist Ihr Kontostand negativ. Wenn jemand Ihnen 3 Euro schuldet, haben Sie »negatives Geld« in Ihrer Geldbörse.

Die wichtigsten Punkte, die Sie bezüglich des Zahlenstrahls wissen sollten, lauten:

- Alle in Abbildung 1.1 dargestellten Zahlen sind *ganz*, also heißen sie *ganze Zahlen*. Eine *ganze Zahl* hat keinen zusätzlichen Bruchteil.
- Die Zahlen rechts der Null sind *positive ganze Zahlen*; die Zahlen links von ihr sind *negative ganze Zahlen*.

  Mathematiker haben Schwierigkeiten mit der Null (und das ist kein Witz). Sie rechnen sie zur Gruppe der positiven ganzen Zahlen und nennen diese Gruppe dann *nichtnegative Zahlen*.
- Der Zahlenstrahl reicht links und rechts bis ins Unendliche und darüber hinaus (wie Captain Buzz Lightyear sagt).
- Dezimalzahlen (wie 0,75) und regelmäßige Brüche (wie 3/5) sind nur ein Teil einer ganzen Zahl. Sie alle haben ihren Platz irgendwo auf dem Zahlenstrahl. Sie fügen sich zwischen den ganzen Zahlen ein. 2,75 liegt beispielsweise auf dem Zahlenstrahl zwischen 2 und 3, da die Zahl größer als 2 und kleiner als 3 ist.

Die vier Grundrechenarten

Um irgendeine Form von Mathematik betreiben zu können, muss man die mathematischen Grundlagen kennen. Mithilfe der vier Grundrechenarten lassen sich alle Arten von mathematischen Problemen im Alltag lösen. Dabei ist es wichtig, dass Sie mithilfe der gleichen Grundrechenarten auch mit Brüchen und Prozentangaben umgehen können, die ständig bei gewöhnlichen Mathematikaufgaben vorkommen. Später (in Kapitel 2) bilden diese Verfahren die Grundlage für den Umgang mit algebraischen Gleichungen und der Geometrie.

Die Kernverfahren sind die Addition und die Subtraktion. Sie kennen sie sehr wahrscheinlich und wissen, wie sie funktionieren. Multiplikation und Division stehen »eine Stufe über« der Addition und Subtraktion. Die folgenden Abschnitte geben einen kurzen Überblick über die vier Grundrechenarten.

Addition

Addition ist ein mathematisches Verfahren, bei dem man zwei oder mehr Größen so verknüpft, dass sich (normalerweise) eine größere Zahl ergibt. Die Addition war wahrscheinlich die erste Form von Mathematik, die Sie jemals ausgeführt haben.

Sie können Zahlen *(Rechengrößen)* in jeder beliebigen Reihenfolge addieren. Diese Eigenschaft (die Möglichkeit, die Addition in beliebiger Reihenfolge auszuführen) wird *Kommutativität* genannt.

$$21+31+41+51=144$$

ist das Gleiche wie

$$51+41+31+21=144$$

Egal in welcher Reihenfolge Sie die *Summanden* addieren, das Ergebnis ist 144.

Subtraktion

Subtraktion ist das mathematische Verfahren, bei dem Sie eine Zahl von einer anderen abziehen, sodass sich (normalerweise) eine kleinere Zahl ergibt.

Bei der Subtraktion ist die Reihenfolge der Rechengrößen wichtig. Sie können die Zahlen nicht umstellen und die gleiche Antwort erhalten. Beispielsweise ist 77 – 22 (= 55) nicht das Gleiche wie 22 – 77 (= -55).

Multiplikation

Stellen Sie sich die Multiplikation wie eine wiederholte Addition vor. Sie wissen wahrscheinlich, dass $3 \cdot 4 = 12$ ist, doch man erhält das Ergebnis auch, indem man viermal die 3 addiert:

$$3+3+3+3=12$$

Bei großen Zahlen geht es genauso. So entspricht beispielsweise $123 \cdot 7 = 738$ folgender Gleichung:

$$123+123+123+123+123+123+123=738$$

Doch wer will das schon alles zusammenzählen? Daher folgen Sie am besten diesen Empfehlungen:

- ✔ Bei kleinen Zahlen lernen Sie am besten das Einmaleins auswendig; das ist bis $10 \cdot 10$ ganz einfach.
- ✔ Bei großen Zahlen verwenden Sie den Taschenrechner.

Wie bei der Addition können Sie die Zahlen in einer Aufgabe in beliebiger Reihenfolge multiplizieren. Der Ausdruck $3 \cdot 4$ entspricht dem Ausdruck $4 \cdot 3$; beides ergibt 12.

Division

Division ist im Wesentlichen eine »mehrfache Subtraktion«. Bei einem einfachen Problem wie $12 \div 4 = 3$ kann man das Resultat erhalten, indem man die Zahl 3 viermal von 12 abzieht.

$12 \div 3 = 4$ ohne Rest

entspricht 12-3-3-3-3=0 (4 Abzüge ohne Rest)

Bei der Division spielt die Reihenfolge der Rechengrößen eine wichtige Rolle. Sie erhalten nicht das gleiche Ergebnis, wenn Sie die Reihenfolge vertauschen.

Brüche vereinfachen

Brüche können verschiedene Formen annehmen, doch im realen Leben haben Sie es mit gewöhnlichen Brüchen oder Dezimalbrüchen zu tun.

Ein *gewöhnlicher Bruch* besteht aus zwei Teilen. Der *Zähler* ist die obere Zahl und der *Nenner* die untere. Sie müssen sich diese Begriffe jedoch nicht unbedingt merken; Sie können auch »obere Zahl« und »untere Zahl« denken.

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Was machen Sie mit Brüchen? Sie rechnen mit ihnen und wandeln sie um. Das ist schon alles.

Mit verschiedenen Arten von Brüchen vertraut werden

Wie bei Eiscreme gibt es auch bei Brüchen verschiedene Sorten. Natürlich sind es nicht 31 oder mehr. Beim Lesen dieses Buches brauchen Sie nur wenige Arten:

- **Echter Bruch:** Bei einem *echten Bruch* ist der Zähler kleiner als der Nenner (beispielsweise $\frac{4}{9}$).
- **Unechter Bruch:** Bei einem *unechten Bruch* ist der Zähler größer als der Nenner (beispielsweise $\frac{9}{4}$).
- **Gemischter Bruch:** Ein *gemischter Bruch* setzt sich aus einer ganzen Zahl und einem Bruch zusammen. Ein Beispiel dafür ist: $1\frac{3}{4}$
- **Dezimalbruch:** Bei einem *Dezimalbruch* wird ein Dezimalpunkt zur Darstellung verwendet (Beispiele sind: 0,23 oder 1,75 oder 47,25 Euro).

Dezimalausdrücke sind ebenfalls Brüche, auch wenn sie anders aussehen als die anderen Brüche. 0,75 ist beispielsweise ein Dezimalausdruck. Und was bedeutet dieser Ausdruck? Er bedeutet 75/100.

Brüche kürzen

Zunächst eine Warnung: Beim Rechnen mit Brüchen entstehen oft »klobige« Ausdrücke. Mit klobig sind unhandliche echte Brüche (wie 48/60) sowie übel aussehende unechte Brüche (wie etwa 37/16) gemeint. Sie sind während des Rechnens praktisch, jedoch als Antwort ungeeignet.

Man kann einen klobigen Bruch in etwas verwandeln, das viel schöner aussieht, indem man den Bruch *kürzt*.

Echte Brüche kürzen

Man kürzt echte Brüche, indem man eine Zahl findet, die sowohl im Zähler als auch im Nenner steckt und die man dann herauszieht. Diesen Vorgang nennt man Kürzen; die Regeln der Multiplikation erlauben das. Bei dem Bruch $\frac{48}{60}$ »ziehen« Sie beispielsweise den gemeinsamen Faktor 12 aus dem Zähler und dem Nenner heraus:

$$\frac{48}{60}=\frac{4\cdot 12}{5\cdot 12}$$

$$\frac{48}{60}=\frac{4}{5}\cdot 1$$

$$\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$$

Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruchs übereinstimmen, ist der Bruch gleich 1. Demzufolge ist $\frac{12}{12}=1$.

Eine weitere Beschreibung des Kürzens lautet: »Man verkleinert einen echten Bruch, indem man die obere und die untere Zahl durch die gleiche Zahl teilt.«

Unechte Brüche kürzen

Um einen unechten Bruch zu kürzen, teilt man ihn in ganze Zahlen und einen verbleibenden kleineren Restbruch. Dabei teilt man die obere Zahl durch die untere und fügt dann die resultierende ganze Zahl und den verbleibenden Bruch zu einem gemischten Bruch zusammen.

Betrachten Sie folgendes Beispiel:

$$\frac{49}{16}=\frac{16+16+16+1}{16}$$
$$\frac{49}{16}=\frac{16}{16}+\frac{16}{16}+\frac{16}{16}+\frac{1}{16}$$
$$\frac{49}{16}=1+1+1+\frac{1}{16}$$
$$\frac{49}{16}=3\frac{1}{16}$$

Brüche addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren

Brüche sind auch nur Zahlen. So wie ganze Zahlen kann man sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Bevor Sie jetzt verschreckt das Buch zuschlagen, bedenken Sie, dass Sie ständig mit Brüchen rechnen. Sie glauben mir nicht? Denken Sie nur ans Geld.

Zunächst sehen Euro und Cent nicht wie Brüche aus, da sie in dezimaler Form auftreten. Aber es sind natürlich Brüche. Um die Einzelheiten zu erfahren, sollten Sie einen Blick auf die folgenden Abschnitte werfen.

Addition

Damit man zwei Brüche addieren kann, müssen sie den gleichen Nenner haben. Wenn die Nenner gleich sind, muss man nur noch die Zähler addieren.

Wenn die Nenner nicht gleich sind, muss man sie gleich machen. Sie können beispielsweise nicht 1/2 Torte direkt zu 1/4 Torte addieren, um eine 3/4 Torte zu erhalten. Sie müssen die 1/2 Torte zunächst in Viertel (2/4) umformen. Abbildung 1.2 zeigt, wie die addierten Tortenstücke aussehen.

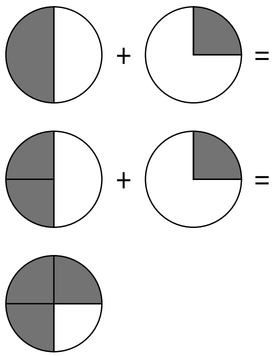

Abbildung 1.2: Die Addition von Brüchen

Es ist einfach, gleiche Nenner zu bekommen, da man die obere und die untere Zahl mit der gleichen Zahl multiplizieren kann.

In dem Beispiel mit der Torte multiplizieren Sie den Zähler und den Nenner in dem Bruch 1/2 mit 2:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}$$

$$x = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{2}{4}$$

Nachdem Sie alle Rechengrößen in Einheiten von 1/4 Torten vorliegen haben, addieren Sie 1/4 und 2/4 und erhalten so 3/4. (Erinnern Sie sich daran, dass der Nenner der gleiche bleibt, wenn Sie die Zähler addieren.)

Subtraktion

Um zwei Brüche voneinander zu subtrahieren, müssen sie ebenfalls den gleichen Nenner haben (wie bei der Addition). Dann muss man nur noch mit den Zählern rechnen.

Wenn die Nenner nicht gleich sind, müssen Sie sie gleich machen, bevor Sie die Brüche voneinander abziehen können. Sie können beispielsweise nicht 1/4 Torte direkt von 1 ganzen Torte abziehen (als Bruch ausgedrückt 1/1), um eine 3/4 Torte zu erhalten, da die Nenner nicht gleich sind. Sie müssen wiederum die ganze Torte in Viertel teilen. Das machen Sie, indem Sie den Zähler und den Nenner mit 4 multiplizieren, sodass Sie 4/4 erhalten. Dann können Sie subtrahieren.

$$x = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{4}$$

$$x = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4}{4}$$

Nachdem die Rechengrößen in Einheiten von 1/4 Torten vorliegen, ziehen Sie 1/4 von 4/4 ab und erhalten 3/4. (Erinnern Sie sich daran, dass der Nenner der gleiche bleibt, wenn Sie die Zähler subtrahieren.)

Multiplikation

Im Vergleich zur Addition und Subtraktion von Brüchen ist die Multiplikation von Brüchen einfach. Man multipliziert sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander und kürzt danach.

$$x = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7}$$

$$x = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 7}$$

$$x = \frac{18}{35}$$

Das Ergebnis ist 18/35. Wenn es möglich ist, sollten Sie das Ergebnis kürzen. In diesem Fall können Sie nicht kürzen; es bleibt bei 18/35.

Division

Das Geheimnis beim Teilen von Brüchen lautet: *umkehren und multiplizieren*. Das bedeutet, kehren Sie den zweiten Bruch so um, dass der Nenner oben steht und der Zähler unten. Dann können Sie beide Brüche wie gewöhnlich multiplizieren.

Angenommen, Sie wollen 1/4 durch 2 teilen. (Beachten Sie, dass die Bruchdarstellung einer ganzen Zahl diese Zahl geteilt durch 1 ist.) Das Ergebnis ist offensichtlich 1/8. Nicht so offensichtlich, sagen Sie? Sie erhalten das Ergebnis auf folgendem Weg:

$$x = \frac{1}{4} \div 2$$
$$x = \frac{1}{4} \div \frac{2}{1}$$
$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{8}$$

Wenn Sie einen Bruch durch einen Bruch teilen wollen, wenden Sie die gleiche Methode an:

$$x = \frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1}$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Bedenken Sie, dass das Teilen durch einen Bruch zu einem *größeren* Ergebnis führt als das Teilen durch eine ganze Zahl.

Man kann nicht durch null teilen. Das ist mathematisch nicht möglich. Eine bekannte Redewendung lautet: »Niemals durch null teilen! Es ist vergeudete Zeit und es verärgert die Null.«

Brüche umwandeln

Die nützlichste Umwandlung von Brüchen ist die Umwandlung von einem gewöhnlichen Bruch in Dezimaldarstellung beziehungsweise von der Dezimaldarstellung in einen gewöhnlichen Bruch.

Ein Bruch beschreibt auch ein Verhältnis

In der Mathematik ist ein Verhältnis eine Beziehung zwischen zwei Zahlen. Ich erwähne das, weil Verhältnisse immer wieder vorkommen.

Die Größe Ihres Fernsehbildes wird Seitenverhältnis genannt; gewöhnlich beträgt es heutzutage 16:9. Das bedeutet, die Breite des Bildschirms beträgt 16 Zentimeter pro 9 Zentimeter Höhe. Dabei spielt es keine Rolle, wie groß der Bildschirm ist. Das Verhältnis ist immer gleich.

Wenn Sie eine Motorsense (auch als Rasentrimmer bekannt) haben, die zum Betrieb Benzin benötigt, kaufen Sie wahrscheinlich ein 40:1-Gemisch für Zweitaktmotoren. Das Verhältnis 40:1 besagt, dass 40 Teile Benzin mit einem Teil Öl gemischt wurden.

Einen Bruch in eine Dezimalzahl umwandeln

Um einen gewöhnlichen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, muss man nur den Zähler durch den Nenner teilen. Die Zahl 4/5 verwandelt sich sofort in die Zahl 0,8, wenn Sie 4 durch 5 teilen.

Seien Sie nicht überrascht oder besorgt, wenn eine Division mal nicht »aufgeht«. Die Dezimaldarstellung von 1/3 lautet beispielsweise 0,333333333 (und die Dreien setzen sich unendlich fort). Wenn Sie beim Einkauf ein Schild entdecken, auf dem »33 % Rabatt« steht, ist der Preis um 33 Prozent beziehungsweise 1/3 reduziert. Trägt das Schild die Aufschrift »20 % Rabatt«, ist der Preis um 20/100 beziehungsweise 1/5 reduziert. (Der Abschnitt »Mit Prozentangaben rechnen« weiter hinten in diesem Kapitel enthält weitere Informationen zum Rechnen mit Prozenten.)

Eine Dezimalzahl in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln

Um eine Dezimalzahl in einen gewöhnlichen Bruch umzuwandeln, muss man nur die Dezimalzahl als Bruch ausdrücken und diesen dann kürzen.

Eine Dezimalzahl mit einer Dezimalstelle (beispielsweise 0,6) wird als Bruch mit dem Nenner 10 dargestellt. Eine Dezimalzahl mit zwei Dezimalstellen (beispielsweise 0,25) wird dagegen als Bruch mit dem Nenner 100 dargestellt und so weiter. Hier einige Beispiele:

$$0{,}6 = \frac{6}{10}$$

$$0{,}71 = \frac{71}{100}$$

$$0{,}303 = \frac{303}{1.000}$$

Beachten Sie, dass die Anzahl der Nullen im Nenner der Anzahl der Dezimalstellen der Dezimalzahl entspricht.

Wenn Sie beispielsweise die Zahl 0,375 in einen Bruch umwandeln wollen, folgen Sie diesen Schritten:

$$x = \frac{375}{1.000}$$
$$x = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125}$$
$$x = \frac{3}{8} \cdot \frac{125}{125}$$
$$x = \frac{3}{8} \cdot 1$$
$$x = \frac{3}{8}$$

Wenn Sie in diesem Beispiel die Zahl 125 im Zähler und Nenner »kürzen«, erhalten Sie den gewöhnlichen Bruch 3/8. Im Abschnitt »Echte Brüche kürzen« weiter vorn in diesem Kapitel finden Sie Einzelheiten zum Kürzen.

Mit Prozentangaben rechnen

Eine Prozentangabe ist ein Bruch, dessen Nenner sich niemals ändert. Er beträgt immer 100. Die Angabe »33 Prozent« bedeutet 33 Teile von 100 beziehungsweise 33/100 beziehungsweise 0,33. Prozentangaben sind entweder durch die Schreibweise »33 %« oder »33 Prozent« gekennzeichnet. Egal wie es geschrieben wird, die Angabe bedeutet »dreiunddreißig Teile von hundert«.

Prozent bedeutet »per centum«; das kommt aus dem Lateinischen und bedeutet »von Hundert« oder »Hundertstel«. Somit bezieht sich eine Prozentangabe immer auf den Anteil von Hundert.

Prozentangaben sind insbesondere beim Vergleich von zwei Größen nützlich. Wenn beispielsweise ein Bier 5,5 % Alkohol enthält und ein anderes 12 %, können Sie sicher sein, dass das Bier mit »mehr Umdrehungen« die größere Wirkung hat.

Prozentangaben sind auch hilfreich beim Vergleich mit einem beliebigen Standard. Lebensmitteletiketten sind hier ein gutes Beispiel. Sie vergleichen den Inhalt bestimmter Stoffe wie Cholesterin, Vitamine oder Mineralien mit einer Referenzmenge für durchschnittliche Erwachsene.

Eine Prozentzahl ist eine *dimensionslose* Angabe; das bedeutet, sie besitzt keine physikalische Einheit. 50 Prozent einer Länge sind einfach 50 Prozent, egal ob man über Meter oder Lichtjahre redet.

Einen gewöhnlichen Bruch in eine Prozentzahl umwandeln

Manchmal wollen Sie Brüche in Prozentangaben umwandeln. Nehmen Sie beispielsweise an, dass Sie genug von Ihrem Weg zur Arbeit haben, weil Sie jeweils eine Stunde für Hin- und

Rückweg benötigen. Sie arbeiten neun Stunden am Tag, somit sind das bereits elf Stunden Ihres Tages; zwei davon verbringen Sie im Straßenverkehr. Während Sie im stockenden Verkehr festsitzen, sind Sie neugierig zu erfahren, wie viel Prozent Ihrer beruflichen Zeit Sie mit Pendeln verbringen. Der Bruch beträgt 2/11; wie viel Prozent sind das?

Um einen gewöhnlichen Bruch in eine Prozentangabe umzuwandeln, müssen Sie nur den Zähler durch den Nenner teilen und das Ergebnis mit 100 multiplizieren:

$$\text{Prozent} = \frac{2}{11} \cdot 100$$
$$\text{Prozent} = 0{,}1818 \cdot 100$$
$$\text{Prozent} = 18{,}18$$

Somit ist klar, dass 2/11 gleich 18,18 % ist. Das ist wirklich kinderleicht, oder?

Eine Prozentzahl beschreibt auch ein Verhältnis

Wie weiter oben erläutert, beschreibt ein Verhältnis die Beziehung zwischen zwei Zahlen. Eine Prozentzahl kann auch als Verhältnis angegeben werden. Wenn beispielsweise eine Flasche Wodka 40 % Alkohol enthält, bedeutet das, dass 40 von 100 Teilen Alkohol sind. Das entspricht einem Verhältnis von 40:60, 40 Teile Alkohol und 60 Teile Wasser.

Man kann auch ein Verhältnis in eine Dezimalzahl umwandeln. So hat beispielsweise ein »Vier-zu-eins-Martini« ein Gin-Wermut-Verhältnis von 4:1. Der Anteil Wermut am Cocktail beträgt also 1:5 beziehungsweise 20 Prozent.

Eine Prozentzahl in einen Bruch umwandeln

Manchmal kann ein Bruch nützlicher als eine Prozentangabe sein. Sie wollen vielleicht wissen, welcher Bruchteil Ihres Gehalts für Steuern verwendet wird. Oder Sie verzichten vielleicht eher darauf, eine ganze Tüte Chips mit 250 Gramm Inhalt zu essen, wenn Sie wissen, dass sie bereits die Hälfte der empfohlenen Menge an Natrium pro Tag enthält, verglichen mit der Angabe 50 Prozent.

Um eine Prozentzahl in einen gewöhnlichen Bruch umzuwandeln, muss man die Prozentangabe durch 100 teilen und das Ergebnis anschließend kürzen. Wollen Sie beispielsweise die Angabe 80 Prozent in einen Bruch umwandeln, gehen Sie folgendermaßen vor:

$$80\ \text{Prozent} = ?$$
$$80\ \text{Prozent} = \frac{80}{100}$$
$$80\ \text{Prozent} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20}$$
$$80\ \text{Prozent} = \frac{4}{5} \cdot 1$$
$$80\ \text{Prozent} = \frac{4}{5}$$

Die Angabe 80 Prozent steht für 80/100. Sie bilden also einen Bruch, den Sie kürzen. Wie Sie sehen, entspricht 80 Prozent dem Bruch 4/5.

Diagramme und Schaubilder verwenden

Ein Diagramm oder ein Schaubild ist eine *anschauliche Darstellung* von Zahlen. Es gibt eine Vielzahl verschiedener Diagramme, doch für die Alltagsmathematik benötigen Sie nur drei Arten von Diagrammen: Liniendiagramm (Kurvendiagramm), Kreisdiagramm (oder Tortendiagramm) und Balkendiagramm.

Der entscheidende Punkt ist, dass ein Diagramm anschaulich ist. Die meisten Menschen finden eine anschauliche Darstellung eher verständlich als eine Liste von Zahlen. Man erwartet Diagramme, wenn man die Wirtschaftsseite liest oder Konsumartikel vergleicht. Demnach ist es das Beste, wenn Sie Ihre eigenen Diagramme erstellen können. Vielleicht wollen Sie ein Diagramm zeichnen, das Ihnen ermöglicht, sich ein besseres Bild von Ihrer finanziellen Lage zu machen.

Liniendiagramme verstehen

Ein Liniendiagramm (auch Kurvendiagramm genannt) zeigt Informationen in Form von Datenpunkten an, die durch eine Linie verbunden sind. Anhand dieses Diagramms kann man leicht erkennen, wie sich eine Größe entwickelt. Abbildung 1.3 zeigt die typische Temperaturentwicklung in einer Woche. Was kann man aus diesen Daten herauslesen? Dass das Wochenende heiß war.

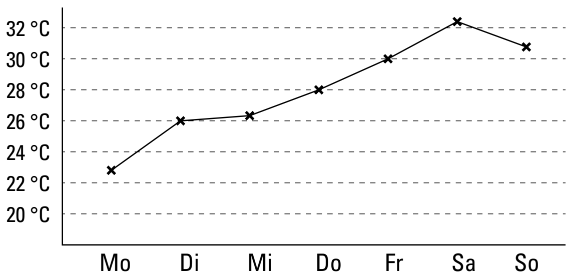

Abbildung 1.3: Ein Liniendiagramm

Mithilfe eines Liniendiagramms kann man leicht erkennen, wie sich die Wirtschaft verhält. Denken Sie an die Arbeitslosenzahlen. Sie können außerdem ein Diagramm erstellen, das zeigt, wie sich eine (oder alle) Ihrer Kapitalanlagen entwickelt.

Tortendiagramme verschlingen

Ein Tortendiagramm sieht aus – na ja – wie eine Torte, die in »Stücke« geteilt ist, die dem relativen Anteil der verschiedenen Elemente entsprechen. Bei dieser Art von Diagramm kann man sowohl das Größenverhältnis der Elemente zueinander als auch das Größenverhältnis der einzelnen Elemente im Verhältnis zur gesamten Torte ablesen.

Tortendiagramme sind großartig, wenn man nur einige Elemente miteinander vergleichen will. Wenn man viele Elemente miteinander vergleichen muss, werden die Stücke zu klein und das Diagramm ist schwerer zu verstehen.

Abbildung 1.4 zeigt ein typisches monatliches Budget. Nachdem die Miete und der Unterhalt für das Auto bezahlt ist und die Lebensmittel gekauft sind, bleibt nicht mehr viel für alles andere übrig, wie Sie der Abbildung entnehmen können. Beachten Sie, dass es keine Rolle spielt, ob Sie 1.000 Euro monatlich betrachten oder 10.000 Euro. Das Diagramm zeigt Größenverhältnisse an, die Angaben sind also *relativ*.

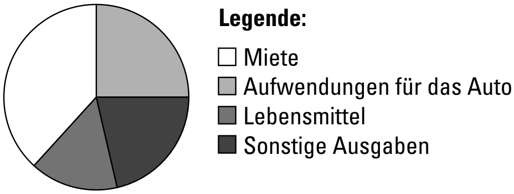

Abbildung 1.4: Ein Tortendiagramm

Tortendiagramme sind großartig, wenn man Staatsausgaben miteinander vergleichen will. Zu sehen, wohin die Steuergelder gehen, ist sehr informativ. Sehen Sie sich das beispielsweise einmal auf der folgenden Webseite an:
`www.bundesregierung.de/statisch/jahresbericht/Webs/Breg/jahresbericht/DE/FinanzielleHandlungsfaehigkeitFuerDiieZukunftsichern/ZukunftspaketSolideFinanzenFuerWohlstandUndSozialeSicherheit/zukunftspaket--solide-finanzen-fuer-wohlstand-und-soziale-sicherheit.html`

Auf Balkendiagramme aufblähen

Ein Balkendiagramm zeigt rechteckige Balken, die entweder horizontal oder vertikal angeordnet sein können. Die Größe der Balken zeigt größere oder kleinere Werte an.

Balkendiagramme sind gut geeignet, um einen Verlauf von allem Möglichen über einen Zeitraum anzuzeigen, beispielsweise unterschiedliche Einkommen, unterschiedliche Ausgaben oder auch die Anzahl der Burger, die im Schnellimbiss um die Ecke verkauft wurden. Abbildung 1.5 zeigt ein Balkendiagramm, in dem Sie meine Kreditkartenabrechnung über einen Zeitraum von sieben Monaten verfolgen können. Können Sie herauslesen, wann ich im Urlaub war?

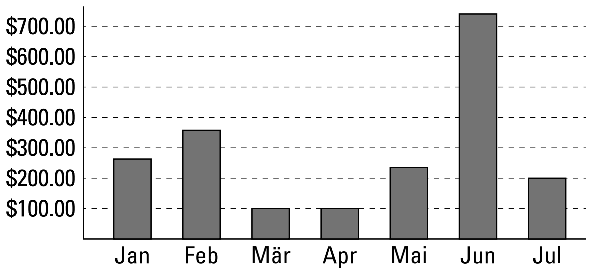

Abbildung 1.5: Ein Balkendiagramm

Mit diesen verflixten Textaufgaben arbeiten

Erinnern Sie sich an die Textaufgaben in der Schule? Ein paar Leute haben sie geliebt, aber die meisten haben sie gehasst.

Bezeichnenderweise beginnen die meisten Matheaufgaben im Leben als Textaufgaben, weil wir eben in Worten sprechen und nicht in Zahlen. Wenn Sie also sagen »Der Chef gab mir eine Gehaltserhöhung von 10 Prozent«, dann beginnt die Berechnung Ihres neuen Gehalts zunächst als Textaufgabe.

Auf den ersten Blick scheinen viele Textaufgaben unergründlich zu sein. Doch das ist nur der erste Eindruck. Sie müssen nur einige Tricks kennen, die es ermöglichen, alle Textaufgaben auf einfache Weise zu lösen. Der grundsätzliche Ablauf beim Lösen von Textaufgaben besteht darin, sich zuerst den Text zu erschließen und erst dann mit dem Rechnen zu beginnen.

Den Text untersuchen

Das Lösen einer Textaufgabe besteht aus zwei Teilen. Der erste besteht darin, die Aufgabenstellung zu untersuchen. Das vereinfacht den zweiten Teil (das Rechnen) erheblich.

Betrachten Sie folgendes Beispiel: Ein Schuppen hat ein Dach, das eine Größe von 1,8 Meter mal 3 Meter auf jeder Seite hat. Das Dach einer Scheune ist doppelt so lang und doppelt so tief wie das Dach des Schuppens. Beide Gebäude sind rot. Wenn man 120 Schindeln benötigt, um das Dach des Schuppens zu decken, wie viel Schindeln benötigt man dann, um das Dach der Scheune zu decken?

Wenn Sie eine Textaufgabe untersuchen, gehen Sie zunächst den Text durch, um die Informationen zu sammeln, die Sie benötigen, um die Aufgabe anschließend zu lösen. Folgen Sie dabei diesen Schritten:

1. **Lesen Sie die Aufgabe und listen Sie die Fakten auf.**

   Lesen Sie Textaufgaben immer mehr als ein Mal. Die Fakten sind im Text versteckt. In der Aufgabe erfahren Sie die Größe des Schuppendachs *auf jeder Seite*. Somit kennen Sie die Größe des Dachs und Sie wissen, wie viel Schindeln man braucht, um das Dach zu decken. Sehr gut!

2. **Finden Sie heraus, wonach genau in der Aufgabe gefragt wird.**

   Bei jeder Textaufgabe laufen Sie Gefahr, dass Sie die *falsche Frage* – ja genau, Sie lesen richtig – beantworten. Versichern Sie sich also, dass Sie wissen, wonach genau gefragt wird. In diesem Beispiel wissen Sie, dass die Antwort die »Anzahl der Schindeln zum Decken des Scheunendachs« ist. Es könnte auch nach der Anzahl der Schindeln zum Decken der Dächer von Scheune und Schuppen gefragt sein, aber das ist hier nicht der Fall.

3. **Sortieren Sie überflüssige Informationen aus.**

   Sowohl Textaufgaben im realen Leben als auch in der Schule enthalten gewöhnlich unerhebliche Informationen. Ignorieren Sie sie. Die Tatsache beispielsweise, dass beide Gebäude rot sind, ist interessant, aber unwichtig.

4. **Stellen Sie fest, welche Informationen fehlen.**

   Manchmal fehlt eine wichtige Tatsache. Es ist jedoch wahrscheinlicher, dass diese Information irgendwo *versteckt* ist. Die Information, dass das Dach der Scheune doppelt so lang und doppelt so tief wie das Dach des Schuppens ist, gibt Ihnen einen Hinweis für die Berechnung der Fläche des Scheunendachs.

5. **Suchen Sie die Schlüsselwörter**

   Schauen Sie nach Schlüsselwörtern und Redewendungen wie »wie viel mehr«, »wie viel weniger« und »gesamt«. Diese Wörter und Formulierungen geben gewöhnlich einen Hinweis darauf, um welche Art von Rechnung es sich handelt.

Die Rechnung durchführen

Bei nahezu jeder Textaufgabe wird eine einfache algebraische Formel verwendet, die in der Aufgabe »versteckt« ist. Wenn Sie die Formel aufgestellt haben, können Sie die Zahlen einsetzen und die Aufgabe lösen.

Um die Rechnung durchzuführen, sammeln Sie die in Ihrer Untersuchung gewonnen Informationen und folgen dann diesen Schritten:

1. **Wandeln Sie die gesammelten Informationen in benötigte Informationen um.**

   Verwenden Sie die gegebenen Größen des Schuppendachs, um zu berechnen, wie viel Quadratmeter von den 120 Schindeln bedeckt werden.

   Fläche (Schuppendach) = Länge · Tiefe · 2

   Fläche (Schuppendach) = 1,8 · 3 · 2

   Fläche (Schuppendach) = 10,8

   Das Ergebnis lautet 10,8 Quadratmeter. (Beachten Sie: Sie müssen mit 2 multiplizieren, um *beide* Seiten des Dachs zu berücksichtigen.)

   Dann verwenden Sie die bekannte Größe des Schuppendachs, um die Größe des Scheunendachs zu berechnen. Das Scheunendach ist doppelt so lang und doppelt so tief wie das Schuppendach.

   Fläche (Scheunendach) = 2 (Länge des Schuppendachs) · 2 (Tiefe des Schuppendachs) · 2

   Fläche (Scheunendach) = 2 · 1,8 · 2 · 3 · 2

   Fläche (Scheunendach) = 3,6 · 6 · 2

   Fläche (Scheunendach) = 43,2

   Das Ergebnis lautet 43,2 Quadratmeter.

2. **Verwenden Sie eine Formel.**

   Es gibt ein Verfahren, bei dem man Größen zueinander in das entsprechende Verhältnis setzt. Machen Sie sich hier keine Gedanken über die Einzelheiten (in Kapitel 3 wird dies vollständig erklärt).

Hier gehen Sie folgendermaßen vor:

$$\frac{\text{bekannte Größe (Fläche Schuppen)}}{\text{bekannte Größe (Schindeln Schuppen)}} = \frac{\text{bekannte Größe (Fläche Scheune)}}{\text{gesuchte Größe (Schindeln Scheune)}}$$

$$\frac{10{,}8}{120} = \frac{43{,}2}{x}$$

$$10{,}8x = 5184$$

$$x = 480$$

Sie multiplizieren beide Seiten kreuzweise mit dem Nenner. Das Ergebnis lautet 480 Schindeln.

Achten Sie auf die Einheiten und geben Sie die Antwort in den gefragten Einheiten an. In diesem Beispiel erfolgt die Antwort in Schindeln, nicht in Quadratmetern.

3. **Prüfen Sie die Antwort auf Plausibilität.**

   Versichern Sie sich, dass die Antwort vernünftig ist. Da die Scheune größer als der Schuppen ist, sollten für die Scheune mehr Schindeln benötigt werden als für den Schuppen. Die Zahlen 120 und 480 zu vergleichen erlaubt eine Plausibilitätsüberprüfung. Wenn Sie in diesem Beispiel die Antwort 48 oder 48.000 Schindeln erhalten, ist etwas falsch.

Wenn Sie gerne eine Kurzfassung hätten, bedenken Sie Folgendes: Die Tatsache, dass das Dach der Scheune doppelt so lang und doppelt so tief ist wie das des Schuppens, bedeutet, dass die Fläche des Scheunendachs viermal so groß ist wie die des Schuppendachs. Mithilfe dieser Information ist die Berechnung ganz einfach: Sie müssen nur die 120 Schindeln des Schuppens mit 4 multiplizieren, dann erhalten Sie 480 Schindeln.

Weitere Tricks zum Lösen von Textaufgaben

Wenn Sie bei einer Textaufgabe feststecken, gibt es ein paar Tricks, die Ihnen weiterhelfen können:

- **Zeichnen Sie ein Diagramm.** Manchmal kann es helfen, die in der Aufgabe angegebenen Fakten bildlich darzustellen. Diese Methode ist hilfreich, wenn Sie die Fläche eines Gartens oder die Gesamtlänge der Bretter für einen Fußboden bestimmen wollen. Sie hilft auch, wenn Sie herausfinden möchten, wie alt Ihre Brüder und Schwestern sein werden, wenn Sie ein bestimmtes Alter erreicht haben.
- **Verwenden Sie eine Formel.** Wenn Sie einer Frage begegnen, die die Zinsen für Ihr Sparbuch oder die Höhe Ihrer Hypothekenrate betrifft, sind die Chancen sehr hoch, dass irgendjemand schon die passende Formel zur Lösung dieses Problems entwickelt hat. Außerdem bestehen gute Aussichten, dass Sie einen Onlinerechner oder eine in einer Tabellenkalkulation integrierte Funktion finden, die Ihnen hilft.

- ✔ **Entwickeln Sie eine Formel.** Manchmal können Sie sofort Ihre eigene einfache Formel aufstellen. Wenn Sie beispielsweise wissen, dass ein Hamburger 21 Gramm Eiweiß enthält und die Ernährungsleitlinien 56 Gramm Eiweiß pro Tag empfehlen, so ergibt kurzes Rechnen (56 geteilt durch 21), dass Sie den Tagesbedarf an Eiweiß mit drei Hamburgern beim Grillfest im Hinterhof bereits abdecken. Und eine Formel lässt sich immer wieder anwenden, wenn Sie sie einmal entwickelt haben.
- ✔ **Berücksichtigen Sie Hinweise.** Die Verwendung von Hinweisen ist nicht nur wünschenswert, sie ist manchmal sogar notwendig. Wenn Sie beispielsweise einen Raum streichen, ist es nicht schwierig, die Fläche, die gestrichen werden soll, zu berechnen (siehe Kapitel 8). Es ist jedoch notwendig, die Informationen des Farbenherstellers zu beachten, damit Sie wissen, für welche Fläche ein Eimer Farbe reicht.